Metrik Uzaylarda Bazı Caristi ve Meir-Keeler Tipi Sabit Figür Sonuçları

Nihal Taş [1] ve Kübra Karaağaç [2*]

[1]Matematik / Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir Üniversitesi, Türkiye
[2]Matematik / Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir Üniversitesi, Türkiye

[*]kubra.mergen@gmail.com Başlıca yazarın mail adresi

Özet – Sabit nokta teorisi, birçok çalışma alanında incelenen ve uygulaması araştırılan bir konu haline gelmiştir. Matematiğin analiz, topoloji, uygulamalı matematik gibi birçok ana bilim dalında sabit nokta teorisi ile ilgili çalışmalar karşımıza gelmektedir. Metrik sabit nokta teorisi de, sabit nokta teorisinin metrik uzaylar üzerinde çeşitli çalışmalarını veren bir dalıdır. Metrik sabit nokta teorisi Stefan Banach zamanından beri yaygın olarak çalışılmaktadır. Banach sabit nokta teoremi, tam metrik uzaylar üzerinde daralma fonksiyonu koşulunu sağlayan bir fonksiyonun sabit noktasının varlığını ve tekliğini veren bir yöntem sunar. Fakat literatürde sabit noktası olmasına rağmen Banach sabit nokta teoreminin koşullarını sağlamayan fonksiyon örnekleri mevcuttur. Bu durumda, bu tarz fonksiyonlar için yeni sabit nokta teoremlerinin araştırılması açık bir problem olarak karşımıza gelmektedir. Bu problemin çözümü için de farklı teknikler kullanılarak, Banach sabit nokta teoremi daha genel bir hale getirilmeye çalışılmaktadır. Bu yöntemlerin biri kullanılan daralma koşulunun genelleştirilmesidir. Örneğin, Banach sabit nokta teorisinde kullanılan daralma koşulu Kannan tipi, Reich tipi ve Ciric gibi çeşitli daralma koşullarına genelleştirilmiştir. Son zamanlarda da, sabit nokta teorisinin geometrik bir genellemesi olarak sabit çember veya sabit figür problemi çalışılmaktadır. Bu problem çerçevesinde, literatürde hem metrik uzaylar üzerinde hem de bazı genelleştirilmiş metrik uzaylar üzerinde çeşitli sabit çember, sabit disk, sabit elips, sabit Cassini ovali gibi sonuçlar elde edilmiştir. Biz de bu çalışmada, metrik uzaylar üzerinde Rhoades'in süreksizlik açık probleminin çözümünde kullanılan iki farklı sayıyı kullanarak, Caristi ve Meir-Keeler tipi daralma koşullarından da esinlenerek yeni sabit çember ve sabit disk sonuçları elde edeceğiz. Elde edilen, bu sonuçların genelleştirilmesinin de çalışılması açısından literatüre katkı sağlanması beklenmektedir.

Anahtar Kelimeler – Sabit Nokta, Sabit Figür, Sabit Çember, Sabit Disk, Metrik Uzay

I. GİRİŞ

Banach daralma koşulunda sabit nokta sayısı bir tektir. Sabit nokta sayısının birden fazla olduğu durumlarda sabit nokta kavramı geometrik bir yaklaşım olarak sabit çember, sabit disk, sabit elips gibi kavramlara genelleştirilir. "Sabit Çember Problemi" nin ilk çözümü [1] de metrik uzaylar üzerinde verilmiştir. Bu çalışmadan sonra hem bir metrik uzayda hem de bazı genelleştirilmiş metrik uzaylarda yeni çözümler araştırılmıştır. Daha sonra bu problem daha genel anlamda sabit figür problemine genelleştirilmiştir [2]. Şimdi sabit çember ve sabit disk tanımlarını hatırlayalım :

(X,d) bir metrik uzay, $T:X\to X$ bir fonksiyon olmak üzere

$$C_{x_0,r}=\{x\in X : d(x,x_0)=r)\}$$

şeklinde tanımlansın.Eğer her $x\in C_{x_0,r}$ için $Tx=x$ olacak şekilde bir T fonksiyonu varsa bu durumda $C_{x_0,r}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir [1]. $D_{x_0,r}$ diski de

$$D_{x_0,r}=\{x\in X : d(x,x_0)\le r\}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer her $x \in D_{x_0,r}$ için $Tx = x$ olacak şekilde bir T fonksiyonu varsa bu durumda $D_{x_0,r}$ diski T nin bir sabit diskidir [3].

Bu çalışmada, (X,d) metrik uzay, $T : X \to X$ bir fonksiyon ve $0 \le a,b < 1$ olmak üzere r, $m_1(x,y)$ ve $m_2(x,y)$ sayıları

$$r = \inf\left\{d(x,Tx) : x \ne Tx, x \in X\right\} \tag{1}$$

$$m_1(x,y) = \max\left\{\begin{array}{l} d(x,y), \\ ad(x,Tx) + (1-a)d(y,Ty), \\ (1-a)d(x,Tx) + ad(y,Ty), \\ \dfrac{b\left[d(x,Ty) + d(y,Tx)\right]}{2} \end{array}\right\} \tag{2}$$

$$m_2(x,y) = \max\left\{\begin{array}{l} d(x,y), \\ ad(x,Tx) + (1-a)d(y,Ty), \\ (1-a)d(x,Tx) + ad(y,Ty), \\ \dfrac{d(x,Ty) + d(y,Tx)}{2} \end{array}\right\} \tag{3}$$

şeklinde tanımlansın. Tanımlanan bu $m_1(x,y)$ ve $m_2(x,y)$ sayıları [4] ve [5] çalışmalarında Rhoades'in sabit noktada süreksizlik problemine [6] çözüm verebilmek adına kullanılmıştır. Biz de bu çalışmamızda bu sayıları yeni sabit çember ve sabit disk sonucu elde etmek için kullanacağız. Bunun için de, $\varphi : X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için

$$\varphi(x) = d(x,Tx) \tag{4}$$

şeklinde olsun. Bu çalışmada φ yardımcı fonksiyonu ile birlikte Caristi [7] ve Meir-Keeler [8] tipi teknikleri yardımı ile yeni sabit çember ve sabit disk sonuçları elde edeceğiz.

II. ANA SONUÇLAR

Aşağıdaki teoremde yeni bir sabit çember teoremi elde etmek için Meir-Keeler tipi ve Caristi tipi sabit nokta teoremlerinden yararlanıyoruz.

Teorem 1: (X,d) bir metrik uzay, $T : X \to X$ bir fonksiyon, r sayısı (1) deki, $m_1(x,y)$ sayısı (2) deki, $m_2(x,y)$ sayısı (3) deki ve φ fonksiyonu (4) deki gibi tanımlansın.Eğer

(i) Her $x \in C_{x_0,r}$ için

$$d(x_0,Tx) \le r \text{ ve } 0 \le \varphi(x) \le 1,$$

(ii) Her $x \in X$ için

$$\varphi(x) > 0 \Rightarrow \varphi(x) < \left[\varphi(x) - \varphi(x_0)\right]\left(\frac{m_1(x,x_0) + m_2(x,x_0)}{2}\right)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa bu durumda $Tx_0 = x_0$ dır ve $C_{x_0,r}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir.

İspat: $r = 0$ olsun. Bu durumda $C_{x_0,r} = \{x_0\}$ olur. $\varphi(x_0) > 0$ olduğunu varsayalım. (ii) koşulunu kullanarak

$$\begin{aligned}\varphi(x_0) &= d(x_0,Tx_0) \\ &< \left[\varphi(x_0) - \varphi(x_0)\right]\left(\frac{m_1(x,x_0) + m_2(x,x_0)}{2}\right) = 0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla, $\varphi(x_0) = 0$ olmalıdır ve buradan

$$Tx_0 = x_0 \tag{5}$$

elde edilir.

$r > 0$ ve $x \in C_{x_0,r}$ olsun. Şimdi T fonksiyonunun $C_{x_0,r}$ çemberini sabit bıraktığını göreceğiz. Bunun için $\varphi(x) > 0$ olduğunu varsayalım. (i), (ii) ve (5) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= d(x,Tx) \\ &< \left[\varphi(x) - \varphi(x_0)\right]\left(\frac{m_1(x,x_0) + m_2(x,x_0)}{2}\right)\end{aligned} \tag{6}$$

eşitsizliği elde edilir. $m_1(x,x_0)$ ve $m_2(x,x_0)$

sayılarını düzenlersek,

$$m_1(x,x_0)=\max\left\{\begin{array}{l} d(x,x_0), \\ ad(x,Tx)+(1-a)d(x_0,Tx_0), \\ (1-a)d(x,Tx)+ad(x_0,Tx_0), \\ \dfrac{b\left[d(x,Tx_0)+d(x_0,Tx)\right]}{2} \end{array}\right\}$$

$$=\max\left\{r,ad(x,Tx),(1-a)d(x,Tx),\frac{b\left[r+d(x_0,Tx)\right]}{2}\right\}$$

$$\leq \max\left\{r,ad(x,Tx),(1-a)d(x,Tx)\right\}=k \qquad (7)$$

ve

$$m_2(x,x_0)=\max\left\{\begin{array}{l} d(x,x_0), \\ ad(x,Tx)+(1-a)d(x_0,Tx_0), \\ (1-a)d(x,Tx)+ad(x_0,Tx_0), \\ \dfrac{d(x,Tx_0)+d(x_0,Tx)}{2} \end{array}\right\}$$

$$=\max\left\{r,ad(x,Tx),(1-a)d(x,Tx),\frac{r+d(x_0,Tx)}{2}\right\}$$

$$\leq \max\left\{r,ad(x,Tx),(1-a)d(x,Tx)\right\}=k$$

elde edilir. Buradan (6) eşitsizliği kullanılarak

$$\varphi(x)=d(x,Tx)\leq d(x,Tx)\left(\frac{k+k}{2}\right) \qquad (8)$$

elde edilir. Şimdi (8) eşitsizliğini 3 durumda inceleyelim:

Durum 1 : $k=r$ olsun. Bu durumda (8) eşitsizliğinden,

$$d(x,Tx)<d(x,Tx)\left(\frac{r+r}{2}\right)$$
$$=d(x,Tx)r\leq d(x,Tx)d(x,Tx)=\left[d(x,Tx)\right]^2$$

çelişkisi elde edilir.

Durum 2 : $k=ad(x,Tx)$ olsun. Bu durumda (8) eşitsizliğinden,

$$d(x,Tx)<d(x,Tx)\left[\frac{ad(x,Tx)+ad(x,Tx)}{2}\right]$$
$$=d(x,Tx)ad(x,Tx)<\left[d(x,Tx)\right]^2$$

çelişkisi elde edilir.

Durum 3 : $k=(1-a)d(x,Tx)$ olsun. Bu durumda (8) eşitsizliğinden,

$$d(x,Tx)<d(x,Tx)\left[\frac{(1-a)d(x,Tx)+(1-a)d(x,Tx)}{2}\right]$$
$$=d(x,Tx)(1-a)d(x,Tx)<\left[d(x,Tx)\right]^2$$

çelişkisi elde edilir.

Sonuç olarak Durum 1, Durum 2 ve Durum 3 den $Tx=x$ olmalıdır ve dolayısıyla $C_{x_0,r}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir. □

Sonuç 1 : (X,d) bir metrik uzay, $T:X\to X$ bir fonksiyon, r sayısı (1) deki, $m_1(x,y)$ sayısı (2) deki, $m_2(x,y)$ sayısı (3) deki ve φ fonksiyonu (4) deki gibi tanımlansın.Eğer,

(i) Her $x\in D_{x_0,r}$ için

$d(x_0,Tx)\leq r$ ve $0\leq\varphi(x)\leq 1$,

(ii) Her $x\in X$ için

$\varphi(x)>0\Rightarrow$

$$\varphi(x)<\left[\varphi(x)-\varphi(x_0)\right]\left(\frac{m_1(x,x_0)+m_2(x,x_0)}{2}\right)$$

koşullarını sağlayan bir $x_0\in X$ varsa bu durumda $Tx_0=x_0$ dır ve $D_{x_0,r}$ diski T nin bir sabit diskidir.

Şimdi Wardowski tipi $\mathbb{F}$ fonksiyon ailesi tanımını vererek yeni bir sabit çember sonucu elde ediyoruz [9].

Tanım : [9] $\mathbb{F}$ aşağıdaki koşulları sağlayacak şekildeki tüm $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonların ailesi olsun.

(F1) F , kesinlikle artandır.

(F2) $(0,\infty)$ içindeki her $\{a_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} F(a_n) = -\infty$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ olmasıdır.

(F3) $\lim_{n\to 0^+} \alpha^k F(\alpha) = 0$ olacak şekilde $k \in (0,1)$ vardır.

Örneğin; $F(x) = \ln(x)$, $F(x) = \ln(x) + x$, $F(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ ve $F(x) = \ln(x^2 + x)$ fonksiyonları $\mathbb{F}$ ailesine aittir [9].

Teorem 2 : (X,d) bir metrik uzay, $T : X \to X$ bir fonksiyon, r sayısı (1) deki, $m_1(x,y)$ sayısı (2) deki, $m_2(x,y)$ sayısı (3) deki ve φ fonksiyonu (4) deki gibi tanımlansın.Eğer,

(i) Her $x \in C_{x_0,r}$ için

$d(x_0,Tx) \le r$ ve $0 \le \varphi(x) \le 1$,

(ii) Her $x \in X$ için

$$\varphi(x) > 0 \Rightarrow t + F(\varphi(x)) \le F\left([\varphi(x) - \varphi(x_0)] \left(\frac{m_1(x,x_0) + m_2(x,x_0)}{2} \right) \right)$$

olacak şekilde bir $x_0 \in X$, $t > 0$ ve $F \in \mathbb{F}$ varsa bu durumda, $Tx_0 = x_0$ dır ve $C_{x_0,r}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir.

İspat : $r = 0$ olsun. Bu durumda $C_{x_0,r} = \{x_0\}$ olur. (2) koşulunun doğrudan bir sonucu olarak, $x_0 = Tx_0$ elde edilir.

Şimdi, $r > 0$ ve $x \in C_{x_0,r}$ için $x \ne Tx$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (1), (2) koşullarını, (7) eşitsizliğindeki k sayısını ve F nin kesinlikle artan özelliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} t + F(\varphi(x)) &= t + F(d(x,Tx)) \\ &\le F\left([\varphi(x) - \varphi(x_0)] \left(\frac{m_1(x,x_0) + m_2(x,x_0)}{2} \right) \right) \\ &\le F\left(d(x,Tx) \frac{k+k}{2} \right) \end{aligned} \tag{9}$$

elde edilir. Şimdi (9) eşitsizliğini 3 durum altında inceleyelim:

Durum 1 : $k = r$ olsun. Bu durumda (9) eşitsizliğinden,

$$t + F(d(x,Tx)) \le F\left(d(x,Tx) \frac{r+r}{2} \right) \le F\left([d(x,Tx)]^2 \right)$$

çelişkisi elde edilir.

Durum 2 : $k = ad(x,Tx)$ olsun. Bu durumda (9) eşitsizliğinden,

$$t + F(d(x,Tx)) \le F\left(a[d(x,Tx)]^2 \right) < F\left([d(x,Tx)]^2 \right)$$

çelişkisi elde edilir.

Durum 3 : $k = (1-a)d(x,Tx)$ olsun. Bu durumda (9) eşitsizliğinden,

$$t + F(d(x,Tx)) \le F\left((1-a)[d(x,Tx)]^2 \right) < F\left([d(x,Tx)]^2 \right)$$

çelişkisi elde edilir.

Sonuç olarak Durum 1, Durum 2 ve Durum 3 den $Tx = x$ olmalıdır. Dolayısıyla, $C_{x_0,r}$ çemberi T nin bir sabit çemberidir. $\square$

Sonuç 2 : (X,d) bir metrik uzay, $T : X \to X$ bir fonksiyon, r sayısı (1) deki, $m_1(x,y)$ sayısı (2) deki, $m_2(x,y)$ sayısı (3) deki ve φ fonksiyonu (4) deki gibi tanımlansın.Eğer,

(i) Her $x \in D_{x_0,r}$ için

$d(x_0,Tx)\leq r$ ve $0\leq \varphi(x)\leq 1$,

(ii) Her $x\in X$ için

$$\varphi(x)>0 \Rightarrow t+F\left(\varphi\left(x\right)\right)$$
$$\leq F\left(\left[\varphi(x)-\varphi(x_0)\right]\left(\frac{m_1(x,x_0)+m_2(x,x_0)}{2}\right)\right)$$

olacak şekilde bir $x_0\in X$, $t>0$ ve $F\in\mathbb{F}$ varsa bu durumda, $Tx_0=x_0$ dır ve $D_{x_0,r}$ diski, T nin bir sabit diskidir.

KAYNAKLAR

[1] N. Y. Özgür and N. Taş, *Some Fixed-Circle Theorems on Metric Spaces*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 42 (2019), no. 4, 1433-1449.

[2] N. Özgür and N. Taş, *Geometric Properties of Fixed Points and Simulation Functions*, arXiv:2102.05417 (2021)

[3] N. Y. Özgür, *Fixed-Disc Results Via Simulation Functions*, Turk. J. Math. 43(6) (2019), 2794-2805.

[4] R. K. Bisht and V. Rakocevic, *Generalized Meir-Keeler Type Contractions and Discontinuity at Fixed Point*, Fixed Point Theory 19 (1) (2018), 57-64.

[5] R. P. Pant, N. Y. Özgür and N. Taş, *On Discontinuity Problem at Fixed Point*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 43 (2020), 499-517

[6] B. E. Rhoades, Contractive Definitions and Continuity, Contemp. Math. 72 (1988), 233-245.

[7] J. Caristi, Fixed Point Theorems For Mappings Satisfying İnwardness Conditions, Trans. Am. Math. Soc. 215 (1976), 241-251.

[8] A. Meir, E. Keeler, A Theorem On Contraction Mappings, J. Math. Anal. Appl. 28 (1969), 326-329.

[9] D. Wardowski, Fixed Points Of A New Type Of Contractive Mappings in Complete Metric Spaces, Fixed Point Theory Appl. 2012 (2012), 94.