1st International Conference on Frontiers in Academic Research

https://www.icfarconf.com/ February 18-21, 2023, Konya, Turkey

S-Metrik Koruyan Fonksiyonlar Üzerine

Nihal Taş[1] ve Ayşenur Şen[2*]

[1] *Matematik Bölümü / Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir Üniversitesi, Türkiye*
[2] *Matematik Bölümü / Fen Bilimleri Enstitüsü, Balıkesir Üniversitesi, Türkiye*

[*]*(ayseenursenn@gmail.com) Başlıca yazarın mail adresi*

Özet **–** Metrik koruyan fonksiyonlar son zamanlarda üzerinde çalışılmaya başlanan bir konu olmuştur. Metrik koruyan fonksiyon, incelenen uzayda fonksiyonun belli özellikleri sağlıyor olması ve bir başka uzay ile karşılaştırıldığında daha genel ya da özel olduğunun araştırılmasında çıkan sonuçlara dayanmaktadır. Bu durumda hem metrik uzay üzerinde hem de genelleştirilmiş bazı metrik uzaylar üzerinde metrik koruyan fonksiyonlar olup olmadığı araştırılan bir problem olarak karşımıza gelmiştir. Biz de bu çalışmada, *S*-metrik uzaylar üzerinde *S*-metrik koruyan fonksiyon tanımını verip, bir metrik tarafından üretilen S-metrik tanımını ise *S*-metrik koruyan fonksiyon ve metrik koruyan fonksiyon arasındaki ilişkileri inceledik. Ayrıca, bu çalışmalar altında *S*-metrik koruyan fonksiyon ve *b*-metrik koruyan fonksiyon arasındaki ilişkiyi de inceledik.

Anahtar Kelimeler – S-Metrik Uzay, B-Metrik Uzay, S-Metrik Koruyan Fonksiyon, B-Metrik Koruyan Fonksiyon, Metrik Koruyan Fonksiyon

I. GİRİŞ

Metrik koruyan fonksiyon kavramı [1] nolu kaynakta çalışılmış olup, bu kavram *b*-metrik uzaylar üzerinde b-metrik koruyan fonksiyon kavramına genelleştirilmiştir [2]. Son zamanlarda, *S*-metrik uzay kavramı metrik uzayların bir genelleştirilmesi olarak Sedghi ve arkadaşları tarafından tanıtılmıştır [3]. Biz de bu çalışma da, *S*-metrik uzay kavramını kullanarak *S*-metrik koruyan fonksiyon kavramını verip, bazı özel koşullar artında metrik koruyan fonksiyon ve *b*-metrik koruyan fonksiyon kavramlarıyla arasındaki ilişkiyi inceledik.

II. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde *S*-metrik koruyan fonksiyon kavramını tanımlayabilmek ve bazı özellikleri inceleyebilmek için gerekli bazı temel kavramlar hatırlatılacaktır.

Tanım 2.1 [3] X boştan farklı bir küme olsun. $S: X \times X \times X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x,y,z,a \in X$ için

(S1) $S(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow x=y=z$,

(S2) $S(x,y,z) \leq S(x,x,a) + S(y,y,a) + S(z,z,a)$

şartlarını sağlıyorsa S fonksiyonuna X kümesi üzerinde bir *S*-metrik denir. (X,S) ikilisine de *S*-metrik uzay denir.

Yardımcı Teorem 2.2 [3] (X,S) bir *S*-metrik uzay olsun. O zaman her $x,y \in X$ için,

$$S(x,x,y)= S(y,y,x)$$

eşitliği sağlanır.

Yardımcı Teorem 2.3 [2] (X,d) bir metrik uzay olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

1) Her $x,y,z \in X$ için $S_d(x,y,z)=d(x,z)+d(y,z)$ şeklinde tanımlanan S_d: X x X x X $\rightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu X kümesi üzerinde bir *S*-metriktir.

2) (X,d) metrik uzayında $x_n \rightarrow x$ olması için gerekli ve yeterli koşul (X,S_d) S-metrik uzayında $x_n \rightarrow x$ olmasıdır.

3) $\{x_n\}$ dizisinin (X,d) metrik uzayında bir Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul $\{x_n\}$ dizisinin (X,S_d) *S*-metrik uzayında bir Cauchy dizisi olmasıdır.

4) (X,d) metrik uzayının tam olması için gerekli ve yeterli koşul (X, S_d) *S*-metrik uzayının tam olmasıdır.

S_d metriğine d metriği tarafından üretilen *S*-metrik adı verilir.

Her d metriği için $S\neq S_d$ olacak şekilde bir *S*-metrik mevcuttur (ayrıntılı bilgi için [5] numaralı kaynağa bakılabilir).

Önerme 2.4 [6] Her $x,y \in X$ için (X,S) bir *S*-metrik uzay ve

$$d(x,y)=S(x,x,y)$$

olsun. Bu durumda,

(1) d, X üzerinde bir *b*-metriktir;

(2) (X,S) de $x_n \rightarrow x$ olması için gerekli ve yeterli koşul (X,d) de $x_n \rightarrow x$ olmasıdır;

(3) x_n in (X,S) de bir Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul x_n in (X,d) de bir Cauchy dizisi olmasıdır.

Örnek 2.5 [5] $X = \mathbb{R}$ olsun ve S : X x X x X $\rightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x, y \in R$ için

$$S(x,y,z) = |x-z| + |x+z-2y|$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(X,\mathbb{R})$ ikilisi bir S-metrik uzaydır ve $S = S_d$ olacak şekilde hiçbir d metriği yoktur.

Tanım 2.6 [2]

- f: $[0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ ve $I \subseteq [0,\infty)$ olsun.

$x<y$ şartını sağlayan her $x, y \in I$ için $f(x) \leq f(y)$ ise f fonksiyonu artan bir fonksiyondur.

- Her $a,b \in [0, \infty)$ için
$$f(a+b) \leq f(a)+f(b)$$

ise f fonksiyonu alttoplamsaldır.

- $f^{-1}(\{0\})=\{0\}$ ise f fonksiyonuna amenable

denir.

Tanım 2.7 [1] f: $[0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. Her (X,d) metrik uzayı için $f \circ d$ fonksiyonu da bir metrik ise f fonksiyonuna bir metrik koruyan denir.

Tanım 2.8 [7] X boştan farklı bir küme olsun. d: X x X $\rightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki üç koşulu sağlıyorsa X üzerinde bir *b*-metriktir.

(B1) Her $x,y \in X$ için, $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$,

(B2) Her $x,y \in X$ için, $d(x,y) = d(y,x)$ ve

(B3) Her $x,y,z \in X$ için, $d(x,y) \leq s(d(x,z)+d(z,y))$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $s \geq 1$ vardır.

d fonksiyonu X üzerinde *b*-metrik ise (X,d) uzayına *b*-metrik uzay denir ve (B3) koşuluna s-üçgen eşitsizliği denir.

Tanım 2.9 [2] (X,d) bir *b*-metrik uzay ve f: $[0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. $f \circ d$ fonksiyonu da X üzerinde bir *b*-metrik ise f fonksiyonuna bir *b*-metrik koruyan denir.

Tüm *b*-metrik koruyan fonksiyonların kümesi de $\mathcal{B}$ ile gösterilir.

III. ANA SONUÇLAR

Tanım 3.1 (X,S) bir *S*-metrik uzay ve f: $[0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. $f \circ S$ fonksiyonu da X üzerinde bir *S*-metrik ise f fonksiyonuna bir *S*-metrik koruyan denir.

Tüm *S*-metrik koruyan fonksiyonların kümesi de $\mathcal{S}$ ile gösterilir.

Örnek 3.2 (X,S) bir *S*-metrik uzay ve $f: [0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\alpha \in [1,\infty)$ olmak üzere

$$f(x)= \alpha x,$$

şeklinde tanımlı olsun. Bu durumda f fonksiyonu *S*-metrik koruyan fonksiyonudur. Gerçekten,

$$\text{(S1) } f \circ S(x,y,z) = f(S(x,y,z)) = f(d(x,y)+d(x,z))$$
$$\leq f(d(x,y))+f(d(x,z))$$
$$= f \circ d(x,y)+ f \circ d(x,z) \geq 0,$$

$$\text{(S2) } f \circ S(x,y,z) = f(S(x,y,z))=0$$
$$\Leftrightarrow f(d(x,y)+d(x,z)) =0$$
$$\Leftrightarrow d(x,y)+d(x,z) =0$$
$$\Leftrightarrow x=y \text{ ve } x=z$$
$$\Leftrightarrow x=y=z$$

ve

$$\text{(S3) } f \circ S(x,y,z) = f(S(x,y,z)) = f(d(x,z)+d(y,z))$$
$$\leq f(d(x,a)+d(a,z)+d(y,a)+d(a,z))$$
$$= f(d(x,a)+d(y,a)+2d(a,z))$$
$$\leq f(2d(x,a)+2d(y,a)+2d(a,z))$$
$$=f(S(x,x,a)+S(y,y,a)+S(z,z,a))$$
$$= f \circ S(x,x,a)+f \circ S(y,y,a)+f \circ S(z,z,a)$$

elde edilir.

Teorem 3.3 (X,d) bir metrik uzay ve $f: [0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ amenable, alttoplamsal ve artan bir fonksiyon olsun.S_d: $X \times X \times X \rightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x,y,z \in X$ için

$$S_d(x,y,z)= d(x,y)+d(x,z)$$

şeklinde tanımlansın. Eğer f fonksiyonu (X,d) metrik uzayına göre bir metrik koruyan fonksiyon ise bu durumda f fonksiyonu (X,S_d) *S*-metrik uzayına göre de bir *S*-metrik koruyan fonksiyondur.

İspat.

$$\text{(S1) } f \circ S_d(x,y,z) = f(S_d(x,y,z)) = f(d(x,y)+d(x,z))$$
$$\leq f(d(x,y))+f(d(x,z))$$
$$= f \circ d(x,y)+ f \circ d(x,z) \geq 0,$$

$$\text{(S2) } f \circ S_d(x,y,z) = f(S_d(x,y,z))=0$$
$$\Leftrightarrow f(d(x,y)+d(x,z)) =0$$
$$\Leftrightarrow d(x,y)+d(x,z) =0$$
$$\Leftrightarrow x=y \text{ ve } x=z$$
$$\Leftrightarrow x=y=z$$

ve

$$\text{(S3) } f \circ S_d(x,y,z) = f(S_d(x,y,z)) = f(d(x,z)+d(y,z))$$
$$\leq f(d(x,a)+d(a,z)+d(y,a)+d(a,z))$$
$$= f(d(x,a)+d(y,a)+2d(a,z))$$
$$\leq f(2d(x,a)+2d(y,a)+2d(a,z))$$
$$=f(S_d(x,x,a)+ S_d(y,y,a)+ S_d(z,z,a))$$
$$= f \circ S_d(x,x,a)+ f \circ S_d(y,y,a)+f \circ S_d(z,z,a)$$

olduğu görülür.

Teorem 3.4 (X,S) bir *S*-metrik uzay ve $f: [0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ bir fonksiyon olsun. $d_s: X \times X \rightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x,y \in X$ için

$$d_s(x,y) = S(x,x,y)$$

şeklinde tanımlansın. Eğer f fonksiyonu (X,S) *S*-metrik uzayına göre bir *S*-metrik koruyan fonksiyon ise bu durumda f fonksiyonu (X,d_s) *b*-metrik uzayına göre bir *b*-metrik koruyan fonksiyondur.

İspat.

(B1) Her $x,y \in X$ için,

$$f \circ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow f(d(x,y))=0$$
$$\Leftrightarrow f(S(x,x,y))=0$$
$$\Leftrightarrow f \circ d(x,x,y)=0$$
$$\Leftrightarrow x=y,$$

(B2) Her $x,y \in X$ için,

$$
\begin{aligned}
f \circ d(x,y) &= f(d(x,y)) \\
&= f(S(x,x,y)) \\
&= f(S(y,y,x)) \\
&= f(d(y,x)) \\
&= f \circ d(y,x)
\end{aligned}
$$

(B3) Her $x,y \in X$ için,

$$
\begin{aligned}
f \circ d(x,y) &= f(d(x,y)) \\
&= f(S(x,x,y)) = f \circ S(x,x,y) \\
&\leq f \circ S(x,x,z) + f \circ S(x,x,z) + f \circ S(y,y,z) \\
&= 2\, f \circ S(x,x,z) + f \circ S(y,y,z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f \circ d(x,y) = f(d(x,y)) = f(S(x,x,y)) = f(S(y,y,x)) &= f \circ S(y,y,x) \\
&\leq 2\, f \circ S(y,y,z) + f \circ S(x,x,z)
\end{aligned}
$$

$$2\, f \circ d(x,y) \leq 3\, f \circ S(x,x,z) + 3\, f \circ S(y,y,z)$$

$$
\begin{aligned}
f \circ d(x,y) &\leq {}^{3}\!/_{2}\, (f \circ S(x,x,z) + f \circ S(y,y,z)) \\
&= {}^{3}\!/_{2}\, (f \circ S(x,z) + f \circ S(y,z))
\end{aligned}
$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] P. Corazza, *Introduction to metric-preserving functions*, Amer. Math. Montly 106 (4) (1999), 309-323.

[2] T. Khemaratchatakumthorn and P. Pongsriiam, *Remarks on b-metric and metric-preserving functions*, Math. Slovaca 68 (5) (2018), 1009-1016.

[3] S. Sedghi, N. Shobe and A. Aliouche, *A generalization of fixed point theorems in S-metric spaces*, Mat. Vesnik 64 (3) (2012), 258-266.

[4] N. T. Hieu, N. T. Ly and N. V. Dung, *A generalization of Ciric quasi-contractions for maps on S-metric spaces*, Thai J. Math. 13 (2) (2015), 369-380.

[5] N. Y. Özgür and N. Taş, *Some new contractive mappings on S-metric spaces and their relationships with the mapping (S25)*, Math. Sci. 11 (2017), 7-16.

[6] S. Sedghi and N. V. Dung, *Fixed point theorems on S-metric spaces*, Mat. Vesnik 66 (1) (2014), 113-124.

[7] I. A. Bakhtin, *The contraction mapping principle in quasimetric spaces*, Funct. Anal. 30 (1989), 26-37.