All Sciences Proceedings
http://as-proceeding.com/

1st International Conference on Modern and Advanced Research

July 29-31, 2023 : Konya, Turkey

ICMAR
https://as-proceeding.com/index.php/icmar

İkinci mertebeden bir diferansiyel operatörün özdeğerlerinin sayısının asimtotik ifadesi

Erdoğan Şen[1*], Azad Bayramov [2] ve Kamil Oruçoğlu [3]

[1]*Matematik Bölümü, Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi, Türkiye*
[2]*Azerbaycan Bilimler Akademisi Enstitüsü, Azerbaycan*
[3]*Matematik Mühendisliği Bölümü, İstanbul Teknik Üniversitesi, Türkiye*

[*]*erdogan.math@gmail.com*

Özet – Bu çalışmada hem sınırsız hem de sınırlı bir operatör içeren bir diferansiyel operatörün özdeğerlerinin sayısı için asimtotik formüller elde edilecektir.

Anahtar Kelimeler –Özdeğerler, Sturm—Liouville Problemi, Sınır-Değer Problemi, Hilbert Uzayı, Kendine Eş Operatör

I. GİRİŞ

H sonsuz boyutlu ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. $H_1 = L_2(0,1;H)$ uzayında (1.1) diferansiyel ifadesini göz önüne alalım. Bu ifadede A, $D(A) \subset H$ olmak üzere $D(A)$ dan H ye

$$A = A^* \geq I,\ A^{-1} \in \sigma_\infty(H) \qquad (1.2)$$

Koşullarını sağlayan bir operatördür. A operatörünün özdeğerlerini $\gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \ldots \leq \gamma_n \leq \ldots$ ile ve bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özvektörleri de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n \ldots$ ile gösterelim. $D(L_0')$ ile H_1 uzayında aşağıdaki koşulları sağlayan fonksiyonların kümesini gösterelim:

1.) $y(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında H uzayındaki norma gore 2. mertebeden sürekli türeve sahiptir

2.) Her $x \in [0,1]$ için $y(x) \in D(A)$ ve $Ay(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında H uzayındaki norma gore süreklidir.

3.) $y(0) = 0,\ y'(1) + ay(1) = 0$.

$D(L_0')$ dan H_1 e $L_0' y = l_0(y)$ lineer operatörünü göz önüne alalım.

$y'' + \lambda y = 0$ diferansiyel ifadesi ve $y(0) = 0,\ y'(1) + ay(1) = 0$ sınır koşulları ile oluşturulan Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini s_n $(n = 0,1,\ldots)$ ile gösterelim.

$$\mu_m = s_n + \gamma_j \ \ (n = 0,1,\ldots;\ j = 1,2,\ldots;\ m = 0,1,\ldots)$$

L_0' operatörünün özdeğerleri ve

$$\alpha_m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + a^{-1}\cos^2\sqrt{\mu_m}}}$$

olmak üzere

$$\psi_{mj}^{\ 0} = \alpha_m \varphi_j \sin\sqrt{\mu_m}\, x$$

sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen ortonormal özvektörlerdir.

II. BULGULAR

Fonksiyonel analizden aşağıdakileri biliyoruz:

- $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, $L_2[0,1]$ uzayında ve $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, H uzayında tam diziler ise $\{f_k(x)e_n\}_{k,n=1}^{\infty}$ kümesi H_1 uzayında tamdır.

- L_0' operatörü simetriktir [4].
- $L_0 = \overline{L_0'}$ olsun. $L_0 : D(L_0) \to H_1$ kapalı simetrik bir operatördür. Bu operatörün özvektörlerinden oluşan küme tam olduğundan söz konusu operator kendine eş operatördür [1].
- $Q(x)$, operator fonksiyonu $[0,1]$ aralığında tanımlı olsun ve aşağıdaki koşulları sağlasın:
  a.) Her $x \in [0,1]$ için $Q(x) : H \to H$ sınırlı ve kendine eştir.
  b.) $Q(x)$, $[0,1]$ aralığında zayıf ölçülebilirdir.
  c.) $\|Q(x)\|$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlıdır.

  O halde her $y = y(x) \in H_1$ için $Q(x)y(x) \in H_1$ için $Q : H_1 \to H_1$, Qy operatörü sınırlı ve kendine eştir [1].
- $H_1 = L_2(0, \pi; H)$ uzayında

$$l(y) = -y''(x) + Ay(x) + Q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y(0) = 0,\ y'(1) + ay(1) = 0$$

sınır koşulları ile oluşturulan $L = L_0 + Q$ operatörü kendine eş operatördür [4].
- Her $y \in D(L_0)$ için $(L_0 y, y)_{H_1} \geq (y, y)_{H_1}$ dir [1]
- L_0 ve L operatörlerinin rezolventleri sırasıyla R_λ^0 ve R_λ olsun.

$$R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda I)^{-1},\ R_\lambda = (L - \lambda I)^{-1}$$

dir. L_0 operatörünün özdeğerleri $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \ldots \leq \mu_m \leq \ldots$ olsun. L_0 operatörünün özdeğerleri $\mu_m = s_n + \gamma_j$ $(n = 0,1,\ldots;\ j = 1,2,\ldots;\ m = 0,1,\ldots)$ şeklinde ve $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$, $\lim_{j\to\infty} \gamma_j = \infty$ olduğundan $\lim_{m\to\infty} \mu_m = \infty$ olur. Yani her $\mu \in \rho(L_0)$ için R_μ^0 operatörünün $\left\{ \frac{1}{\mu_m - \mu} \right\}_{m=1}^{\infty}$ özdeğerler dizisinin limiti sıfırdır.
- $R_\lambda^0 - R_\mu^0 = (\lambda - \mu) R_\lambda^0 R_\mu^0$ formülünden her $\lambda \in \rho(L_0)$ için R_λ^0 operatörünün tam sürekli olduğu elde edilir.
- L_0 operatörünün spektrumu her birinin katlılığı sonlu olan $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_m, \ldots$ özdeğerlerinden oluşur. Ayrıca $\lim_{m\to\infty} \mu_m = \infty$ olduğundan L_0 operatörü saf ayrık spektruma sahiptir [4].
- $Q : H_1 \to H_1$ sınırlı kendine eş bir operatördür. O halde $L : D(L) \to H_1,\ L = L_0 + Q$ operatörü de saf ayrık spektruma sahip olacaktır [4].
- L operatörünün özdeğerleri $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_m \leq \ldots$ olsun. Her $\mu \in \rho(L)$ sayısı için $\lim_{m\to\infty} (\lambda_m - \mu)^{-1} = 0$ olduğundan $R_\mu = (L - \mu I)^{-1}$ operatörünün spektrumu $\left\{0, (\lambda_n - \mu)^{-1} : n = 0,1,\ldots m,\ldots\right\}$ kümesinden ibarettir. O halde her $(\lambda_n - \mu)^{-1}$ sayısı R_μ operatörünün katlılığı sonlu olan bir özdeğeridir. Her $\mu \in \rho(L_0) \cap \Re$ için $R_\mu : H_1 \to H_1$ sınırlı, kendine eş ve tam sürekli operatördür [4].
- $R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu$ formülünden her $\lambda \in \rho(L)$ için R_λ operatörünün tam sürekli olduğu elde edilir [3].

Gorbachuk ve Gorbachuk [2] çalışmasında

$$-\frac{d^2 y}{dt^2} + Ay + q(t)y - \lambda y = 0,$$
$$y'(0) + B_1 y(0) = 0, \quad y'(1) + B_2 y(1) = 0$$

sınır-değer probleminin özdeğerleri için asimtotik formül bulmuşlardır. Fakat burda B_1 ve B_2 sınırlı operatörlerdir. Yani B_1 sonsuza gitmediğinden dolayı $y(0)=0,\ y'(1)+ay(1)=0$ sınır koşulları ayrı bir inceleme gerektirir. [2] çalışmasındaki benzer yöntemleri kullanırsak aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz:

Teorem4.1: $\gamma_j = bj^{\beta}\,(0<b,\beta<\infty)$ ise $\lambda\to\infty$ iken

$$N(\lambda)\sim\frac{\lambda^{\frac{\beta+1}{\beta}}}{b^{\frac{1}{\beta}}}\left[1-\frac{1}{\beta+1}\right]$$

olur.

İspat: $N(\lambda)$,

$$bj^{\beta}+s_n\le\lambda\ \ (j=1,2,...;\ n=0,1,...)$$

eşitsizliğini sağlayan (j,n) noktalarının sayısıdır. xy düzleminin $x=0,\ x=\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{1/\beta},\ y=-1$ doğruları ve $bx^{\beta}+y=\lambda\ (x>0,y>0)$ eğrisi ile sınırlandırılmış kapalı alt kümesini F_{λ} ile gösterelim. $N(\lambda)$, F_{λ} kümesine ait olan (j,n) noktalarının sayısıdır. Diğer taraftan $y=\lambda-bx^{\beta}\left(0\le x\le\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{1/\beta}\right)$ azalan olduğundan her $(j,n)\in \mathrm{F}_{\lambda}$ noktasına, köşeleri $(j-1,n-1),(j-1,n),(j,n-1)$ ve (j,n) olan $E_{j,\mathrm{n}}\subset F_{\lambda}$ karesi karşılık gelir. Dolayısıyla $N(\lambda)$, $E_{j,\mathrm{n}}$ karelerinin sayısıdır. Yani $N(\lambda)$, $E_{j,\mathrm{n}}\subset F_{\lambda}\ (j=1,2,...;n=0,1,...)$ karelerinin alanları toplamıdır. Dolayısıyla $N(\lambda)$, F_{λ} nın alanından büyük değildir. Yani

$$N(\lambda)\le\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{1/\beta}+\int_0^{(\lambda/b)^{1/\beta}}\left(\lambda-bx^{\beta}\right)dx.$$

Burada

$$\int_0^{(\lambda/b)^{1/\beta}}\left(\lambda-bx^{\beta}\right)dx=\frac{\lambda^{\frac{\beta+1}{\beta}}}{b^{\frac{1}{\beta}}}\left[1-\frac{1}{(\beta+1)}\right]$$

dir. Yani

$$N(\lambda)\le\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{1/\beta}+\frac{\lambda^{\frac{\beta+1}{\beta}}}{b^{\frac{1}{\beta}}}\left[1-\frac{1}{(\beta+1)}\right]\qquad(2.1)$$

dir.

xy düzleminin $x=0,\ y=0$ doğruları ve $b(x+1)^{\beta}+y+1=\lambda\ (x\ge0,y\ge0)$ eğrisi ile sınırlandırılmış kapalı alt kümesini P_{λ} ile gösterelim.

$E_{j,\mathrm{n}}\subset F_{\lambda}\ (j=1,2,...;n=0,1,...)$ kareleri P_{λ} kümesini kapsar. $N(\lambda)$, D_{λ} nin alanından küçük olamayacağından

$$N(\lambda)\ge\int_0^{\left(\frac{\lambda-1}{b}\right)^{1/\beta}-1}\left(\lambda-b(x+1)^{\beta}-1\right)dx$$

dir. Gerekli işlemler yapıldığında

$$N(\lambda)>\frac{\lambda^{\frac{\beta+1}{\beta}}}{b^{\frac{1}{\beta}}}\left[1-\frac{1}{(\beta+1)}\right]-\left(\frac{\lambda}{b}\right)^{1/\beta}-\lambda+1\quad(2.2)$$

olduğu görülür. (2.1) ve (2.2) den $\lambda\to\infty$ iken

$$N(\lambda)\sim\frac{\lambda^{\frac{\beta+1}{\beta}}}{b^{\frac{1}{\beta}}}\left[1-\frac{1}{\beta+1}\right]$$

elde edilir.

Teorem 4.2: $j\to\infty$ iken $\gamma_j=bj^{\beta}(b>0,\beta<\infty)$ ise $\lambda\to\infty$ iken

$$N(\lambda)\sim\frac{\lambda^{\frac{\beta+1}{\beta}}}{b^{\frac{1}{\beta}}}\left[1-\frac{1}{\beta+1}\right]$$

olur.

İspat: $\varepsilon > 0$ herhangi bir sayı olsun. O zaman $j > K$ iken $1-\varepsilon < \frac{\gamma_j}{bj^{\beta}} < 1+\varepsilon$ olacak şekilde bir $K = K_{\varepsilon}$ doğal sayısı vardır.

$$\gamma_j^{-} = \begin{cases} \gamma_j, & j \le K \\ (1-\varepsilon)bj^{\beta}, & j > K \end{cases}, \quad \gamma_j^{+} = \begin{cases} \gamma_j, & j \le K \\ (1+\varepsilon)bj^{\beta}, & j > K \end{cases}$$

olsun.

$$\gamma_j^{-} + s_n \le \lambda \quad (j = 1,2,...;\ n = 1,2,...)$$
$$\gamma_j^{+} + s_n \le \lambda \quad (j = 1,2,...;\ n = 1,2,...)$$
$$\gamma_j + s_n \le \lambda \quad (j = 1,2,...,\mathrm{K};\ n = 1,2,...)$$
$$(1-\varepsilon)bj^{\beta} + s_n \le \lambda \quad (j = 1,2,...;\ n = 1,2,...)$$
$$(1+\varepsilon)bj^{\beta} + s_n \le \lambda \quad (j = 1,2,...;\ n = 1,2,...)$$
$$(1+\varepsilon)bj^{\beta} + s_n \le \lambda \quad (j = 1,2,...,\mathrm{K};\ n = 1,2,...)$$
$$(1+\varepsilon)bj^{\beta} + s_n \le \lambda \quad (j = K+1,\mathrm{K}+2,...;\ n = 1,2,...)$$

eşitsizliklerini sağlayan (j,m) ikililerinin sayısı sırasıyla $N_i(\lambda)$ $(i = \overline{1,7})$ olsun. $\gamma_j^{-} \le \gamma_j \le \gamma_j^{+}$ $(j = 1,2,...)$ olduğundan

$$N_2(\lambda) \le N(\lambda) \le N_1(\lambda) \tag{2.3}$$

olur. Ayrıca

$$N_1(\lambda) \le N_3(\lambda) + N_4(\lambda) \tag{2.4}$$

$$N_3(\lambda) \le 2K\lambda \tag{2.5}$$

dır. (2.1) eşitsizliğinden faydalanarak

$$N_4(\lambda) \le \left(\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)b}\right)^{1/\beta} + \frac{\lambda^{\frac{\beta+1}{\beta}}}{\left(b(1-\varepsilon)\right)^{\frac{1}{\beta}}}\left[1 - \frac{1}{(\beta+1)}\right] \tag{2.6}$$

elde edilir. (2.3)-(2.6) dan

$$N(\lambda) \le \left(\frac{\lambda}{(1-\varepsilon)b}\right)^{1/\beta} + \frac{\lambda^{\frac{\beta+1}{\beta}}}{\left(b(1-\varepsilon)\right)^{\frac{1}{\beta}}}\left[1 - \frac{1}{(\beta+1)}\right] + 2K\lambda \tag{2.7}$$

olur.

$$N_2(\lambda) = N_3(\lambda) + N_7(\lambda) \ge N_7(\lambda) = N_5(\lambda) - N_6(\lambda) \tag{2.8}$$

$$N_6 \le 2K\lambda \tag{2.9}$$

olduğu kolayca görülür. (2.2) eşitsizliğinden faydalanarak

$$N_5(\lambda) \ge \frac{\lambda^{\frac{\beta+1}{\beta}}}{\left((1+\varepsilon)b\right)^{\frac{1}{\beta}}}\left[1 - \frac{1}{(\beta+1)}\right] - \left(\frac{\lambda}{(1+\varepsilon)b}\right)^{1/\beta} - \lambda + 1 \tag{2.10}$$

bulunur.

Bu eşitsizliklerde $\lambda \to \infty$ ve $\varepsilon \to 0$ için limite

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \frac{bN(\lambda)}{\lambda^{\frac{\beta+1}{\beta}}} = \frac{1}{b^{\frac{1-\beta}{\beta}}}\left[1 - \frac{1}{(\beta+1)}\right];$$

yani

$$N(\lambda) \sim \frac{\lambda^{\frac{\beta+1}{\beta}}}{b^{\frac{1}{\beta}}}\left[1 - \frac{1}{\beta+1}\right] \tag{2.11}$$

elde edilir.

III. TARTIŞMA

Gorbachuk ve Gorbachuk [2] çalışmasında

$$-\frac{d^2y}{dt^2}+Ay+q(t)y-\lambda y=0,$$
$$y'(0)+B_1y(0)=0,\quad y'(1)+B_2y(1)=0$$

sınır-değer probleminin özdeğerlerin sayısı için asimtotik formül bulmuşlardır. Fakat burada B_1 ve B_2 sınırlı operatörlerdir. Bizim çalışmamız ise diferansiyel denklemde sınırsız operator içerdiğinden elde edilen sonuçlar bu çalışmadaki sonuçlardan daha geneldir.

[5] çalışmasında ise yine aynı uzayda $l(y)=-y''(x)+Ay(x)+Q(x)y(x)$ diferansiyel ifadesi ve $y(0)=0,\ y'(1)+ay(1)=0$ sınır koşulları ile oluşturulan $L=L_0+Q$ operatörünün düzenli izi hesaplanmıştır.

[6] makalesinde ise n.mertebeden bir diferansiyel denklem ve periyodik sınır koşulları ile oluşturulan $L=L_0+Q$ operatörünün özdeğerlerinin sayısı için asimtotik formül bulunmuş ve düzenli izi hesaplanmıştır.

[7] çalışmasında ise ikinci mertedebeden süreksiz ve geciken argümanlı bir Sturm—Liouville probleminin özdeğerlerinin yapısı incelenmiş ve düzenli izi hesaplanmıştır.

IV. SONUÇLAR

$$H_1=L_2\left(0,\pi;H\right)$$

uzayında

$$l(y)=-y''(x)+Ay(x)+Q(x)y(x)$$

diferansiyel ifadesi ve

$$y(0)=0,\ y'(1)+ay(1)=0$$

sınır koşulları ile oluşturulan $L=L_0+Q$ operatörünün özdeğerlerinin sayısının asimtotik davranışı (2.11) formulü ile verilir.

KAYNAKLAR

[1] E. Adıgüzelov ve Y. Sezer, On Spektrum of a Self Adjont Differential Operator of Higher Order with Unbounded Operator Coefficient and Asymptotic Behaviour of Eigenvalues, *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, vol. 4, pp. 32-48, 2006.

[2] V. I. Gorbachuk ve M. L. Gorbachuk M. L., Classes of Boundary-Value Problems for the Sturm-Liouville Equation with an Operator Coefficient, *Ukrainian Mathematical Journal*, No.3, pp. 291-305, 1972.

[3] M. A. Naimark, *Linear Differential Operators*, London, 1968.

[4] V. I. Smirnov, *A Course in Higher Mathematics*, Vol. 5, Pergamon Press, New York, 1964.

[5] E. Şen, Regularized traces and spectral properties of differential operators, Doktora tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, 2015

[6] E. Şen A. Bayramov, K. Orucoglu, Regularized trace formula for higher order differential operators with unbounded coefficient, *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. 2016, pp. 1-12, 2016.

[7] M. Bayramoğlu, M.,Bayramov, E. Şen, A regularized trace formula for a discontinuous Sturm-Liouville operator with delayed argument, *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. 2017, pp. 1-12, Nisan, 2017.