All Sciences Proceedings
All Sciences Proceedings
http://as-proceeding.com/

1st International Conference on Recent and Innovative Results in Engineering and Technology

August 16-18, 2023 : Konya, Turkey

ICRIRET
https://as-proceeding.com/index.php/icriret

Berezin Sayısı İçin Genelleştirilmiş Üst Sınırlar

Hamdullah Başaran [1,*] ve Mehmet Gürdal [1]

[1] *Matematik Bölümü / Süleyman Demirel Üniversite, Türkiye*

[*] *(07hamdullahbasaran@gmail.com)*

Özet **–**Matematik ve matematiksel fizikteki birçok araştırmacı, üretici çekirdekli Hilbert uzay operatörün Berezin sembolü konusunda son yıllarda çalışmalar yapmaktadır. Bu yönde, bazı araştırmacılar (1.2) Berezin eşitsizliği ile ilgili önemli çalışmalar sürdürmüştür ([12-17]). Gerçekte, bu eşitsizliğin geliştirilmiş ve iyileştirilmiş versiyonları araştırmacıların son yıllarda ilgisini attırmaktadır ([5-7]. Bu araştırmanın amacı, üretici çekirdekli Hilbert uzayındaki operatörler için Berezin dönüşümünün bazı üst sınırları ifade etmektir. Bazı bilinen Berezin sayısı eşitsizliklerini iyileştirmek ve genelleştirmek için bu üst sınırlar kullanılacaktır. Al-Dolat ve Kittaneh ([2]) eşitsizliğinin Berezin sayısına göre versiyonu ispatlanmıştır. Bu versiyon yardımıyla bu eşitsizlikler ispatlanmıştır.

Anahtar Kelimeler – Berezin Sayısı, Genel Operatör Normu, Cauchy-Buzano Eşitsizliği, Aritmetik-Geometrik Ortalama Eşitsizliği, Karışık Schwarz Eşitsizliği

I. GİRİŞ

Matematik ve matematiksel fizikteki birçok araştırmacı, üretici çekirdekli Hilbert uzay operatörün Berezin sembolü konusunda son yıllarda çalışmalar yapmaktadır. Bu yönde, bazı araştırmacılar (1.2) Berezin eşitsizliği ile ilgili önemli çalışmalar sürdürmüştür ([12-17]). Gerçekte, bu eşitsizliğin geliştirilmiş ve iyileştirilmiş versiyonları araştırmacıların son yıllarda ilgisini attırmaktadır ([5-7]. Bu araştırmanın amacı, üretici çekirdekli Hilbert uzayındaki operatörler için Berezin dönüşümünün bazı üst sınırları ifade etmektir. Bazı bilinen Berezin sayısı eşitsizliklerini iyileştirmek ve genelleştirmek için bu üst sınırlar kullanılacaktır. Al-Dolat ve Kittaneh ([2]) eşitsizliğinin Berezin sayısına göre versiyonu ispatlanmıştır. Bu versiyon yardımıyla bu eşitsizlikler ispatlanmıştır.

Bir üretici çekirdekli Hilbert uzayı (kısaca, ÜÇHU) veya fonksiyonel Hilbert uzayı (kısaca FHU) $\psi_\rho(f) = f(\rho),\ \rho \in \Omega$ fonksiyonelleri $\mathcal{H}$ üzerinde sürekli olacak şekilde bazı Ω kümesi üzerinde karmaşık değerli fonksiyonların $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ Hilbert uzayı olduğunu hatırlatalım. Buradan fonksiyonel analizdeki Riesz teoreminden her $\rho \in \Omega$ ve $f \in \mathcal{H}$ için $f(\rho) = \langle f, k_\rho \rangle$ olacak şekilde bir tek $k_\rho \in H$ fonksiyonu vardır. Aynı zamanda $\{k_\rho : \rho \in \Omega\}$ kümesi $\mathcal{H}$ uzayının üretici çekirdeğidir.

Tanım 1.1. $\mathcal{H}$ bir fonksiyonel Hilbert uzay. Eğer V opertörü $\mathcal{H}$ üzerinde sınırlı doğrusal bir operatör ise $\rho \in \Omega$ için

i. V nin Berezin sembolü(dönüşümü)

$$\tilde{V}(\rho) := \langle V\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho \rangle_{\mathcal{H}},$$

ii. V nin Berezin kümesi(aralığı)

$$\mathrm{Ber}(V) := \mathrm{Range}(\tilde{V}) = \{\tilde{V}(\rho) : \rho \in \Omega\},$$

iii. V nin Berezin sayısı(yarıçapı)

$$\mathrm{ber}(V) := \sup_{\rho \in \Omega} |\tilde{V}(\rho)|$$

ile tanımlanır. Üretici çekirdekli Hilbert uzayları ve Berezin sembolü hakkında daha fazla bilgi için Aronzajn [3] ve Berezin [8] çalışmalarına bakınız.

Üstteki Tanım 1.1'deki ii. ve iii. de verilen kısımlar ile ilgili incelemeler Karaev tarafından [16]'da ÜÇHU üzerindeki operatörler için verilmiştir. Bu yeni kavramlarla ilgili temel özellikler ve gerçekler için [10, 14, 19, 21] çalışmalarına bakınız.

$\mathcal{H}$ uzayında keyfi sınırlı doğrusal V operatörü için Berezin sembolü $\tilde{V}$ sınırlı bir fonksiyoneldir. Bir operatörün bazı temel özellikleri bu operatörün Berezin sembolü olan $\tilde{V}$ nın özelliklerine yansır. Berezin sembolü ilk olarak F. Berezin tarafından [8]'de verilmiş ve operatör teorisinin çoğu sonuçlarını elde etmede hayati bir yöntem olma özelliğini içinde barındırmış bir teori olarak literatüre girmiştir. Sırasıyla $Ber(T)$ ve $ber(T)$ ile de gösterilen Berezin kümesi ve sayısı ilk olarak Karaev tarafından [18]'de verilmiştir.

Bu çalışmamızda $(\mathcal{H}, \langle .,. \rangle)$ ikilisinin karmaşık bir Hilbert uzayı ve $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ifadesinin $\mathcal{H}$ uzayında tüm sınırlı doğrusal operatörlerin C^*-cebirini gösterdiğini kabul edelim. V operatörünün nümerik aralığı ve yarıçapı sırasıyla

$$W(V) \coloneqq \{\langle Vx, x\rangle : x \in \mathcal{H} \ ve \ \|x\| = 1\}$$

ve

$$w(V) \coloneqq sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in \mathcal{H}(\Omega) \ ve \ \|x\| = 1\}$$

ile verilir. Bir operatörün nümerik aralığının bir operatörün spektrumunun, nümerik aralığının kapanışında yer aldığı gibi bazı ilginç özellikleri vardır. Bu teori ile ilgili temel bilgiler için [1,2,3,11] ve referanslarını verebiliriz

Al-Dolat ve Kittaneh [2] aşağıdaki eşitsizliği göstermişlerdir. $r \geq 1$ ve $\gamma \in [0,1]$ için

$$w^{2r}(V) \leq \frac{1+\gamma}{4} \||V|^{2r} + |V^*|^{2r}\| + \frac{1-\gamma}{2} w^r(V)^2.$$

Diğer taraftan herhangi $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ için

$$\frac{1}{2}\|V\| \leq w(V) \leq \|V\| \qquad (1.1)$$

ve

$$ber(V) \leq w(V) \leq \|V\| \qquad (1.2)$$

iyi bilinen eşitsizliklerdir.

Huban vd. [16, 17] aşağıdaki sonuçları ifade etmiştir.

$V, R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ve $r \geq 1$ için

$$\frac{1}{4}\||V|^2 + |V^*|^2\|_{ber} \leq ber(V) \leq \frac{1}{2}\||V|^2 + |V^*|^2\|_{ber} \qquad (1.3)$$

$$ber^r(V^*R) \leq \frac{1}{2}\||V|^{2r} + |R|^{2r}\|_{ber} \qquad (1.4)$$

$$ber^r(V^*R) \leq \frac{1}{2} ber(|R|^r + i|V|^r)^2 \leq \frac{1}{2}\||V|^{2r} + |R|^{2r}\|_{ber} \qquad (1.5)$$

ve

$$ber(V) \leq \frac{1}{2}\||V| + |V^*|\|_{ber} \leq \frac{1}{2}\left(\|V\|_{ber} + \|V^2\|_{ber}^{\frac{1}{2}}\right). \qquad (1.6)$$

2022'de Başaran vd. [7] aşağıdaki eşitsizliği göstermiştir.

$V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ve $r \geq 1$ için

$$ber^{2r}(V) \leq \frac{1}{2}\||V|^{2r} + |V^*|^{2r}\|_{ber} \qquad (1.7)$$

dir.

II. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu kısımda, ihtiyaç duyulan ve sonuçlarımızda direk olarak kullanacağımız önemli bazı eşitsizliklerin verildiği sonuçlar takdim edilmiştir.

Yardımcı Teorem 2.1. ([20]) $\|x\| = 1$ ile $x \in \mathcal{H}$ ve $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ bir pozitif operatör olsun. O halde $r \geq 1$ için

$$\langle Vx, x\rangle^r \leq \langle V^r x, x\rangle \qquad (2.1)$$

sağlanır.

Yardımcı Teorem 2.2. ([4]) f fonksiyonu $[0,\infty)$ üzerinde negatif olmayan ve $V, R \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ pozitif operator olsunlar. Bu durumda

$$\left\|f\left(\frac{V+R}{2}\right)\right\| \leq \left\|\frac{f(V)+f(R)}{2}\right\| \qquad (2.2)$$

eşitsizliği sağlanır.

Yardımcı Teorem 2.3. ([9]) $\|c\| = 1$ ile $a, b, c \in \mathcal{H}$ olsun. Bu durumda

$$|\langle a, c\rangle\langle c, b\rangle| \leq \frac{1}{2}(\|a\|\|b\| + |\langle a, b\rangle|) \qquad (2.3)$$

eşitsizliği elde edilir.

III. TEMEL SONUÇLAR

Teorem 3.1. $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\Omega)$ bir ÜÇHU ve $V\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ olsun. Bu durumda $r\geq 1$ ve $\gamma\in[0,1]$ için

$$ber^{2r}(V)\leq \frac{1+\gamma}{4}\||V|^{2r}+|V^*|^{2r}\|_{ber}+\frac{1-\gamma}{2}ber^r(V^2) \tag{3.1}$$

sağlanır

İspat. $\widehat{\mathrm{k}}_\rho$ normalleştirilmiş üretici çekirdek olsun. Yardımcı Teorem 2.3'te $a=V\widehat{\mathrm{k}}_\rho$, $b=V^*\widehat{\mathrm{k}}_\rho$ ve $c=\widehat{\mathrm{k}}_\rho$ alınarak

$$\left|\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\langle\widehat{\mathrm{k}}_\rho,V^*\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|\leq\frac{1}{2}\left(\|V\widehat{\mathrm{k}}_\rho\|\|V^*\widehat{\mathrm{k}}_\rho\|+\left|\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,V^*\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|\right)$$

elde edilir. $r\geq 1$ için $f(t)=t^r$ nin dışbükeyliğinden

$$\begin{aligned}
&\left|\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\langle\widehat{\mathrm{k}}_\rho,V^*\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^r\\
&\leq\left(\frac{\|V\widehat{\mathrm{k}}_\rho\|\|V^*\widehat{\mathrm{k}}_\rho\|}{2}+\frac{\left|\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,V^*\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|}{2}\right)^r\\
&\leq\frac{\|V\widehat{\mathrm{k}}_\rho\|^r\|V^*\widehat{\mathrm{k}}_\rho\|^r}{2}+\frac{\left|\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,V^*\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^r}{2}\\
&\leq\frac{\|V\widehat{\mathrm{k}}_\rho\|^r\|V^*\widehat{\mathrm{k}}_\rho\|^r}{2}+\frac{1}{2}\left(\gamma\left|\left|\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,V^*\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|\right|^r+(1-\gamma)\left|\left|\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,V^*\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|\right|^r\right)\\
&\leq\frac{1+\gamma}{2}\|V\widehat{\mathrm{k}}_\rho\|^r\|V^*\widehat{\mathrm{k}}_\rho\|^r+\frac{1-\gamma}{2}\left|\langle V^2\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^r
\end{aligned}$$

(Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden)

$$\leq\frac{1+\gamma}{4}\left(\|V\widehat{\mathrm{k}}_\rho\|^{2r}+\|V^*\widehat{\mathrm{k}}_\rho\|^{2r}\right)+\frac{1-\gamma}{2}\left|\langle V^2\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^r$$

(Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden)

$$\begin{aligned}
&\leq\frac{1+\gamma}{4}\left(\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,V\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle^r+\langle V^*\widehat{\mathrm{k}}_\rho,V^*\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle^r\right)+\frac{1-\gamma}{2}\left|\langle V^2\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^r\\
&=\frac{1+\gamma}{4}\left(\langle|V|^2\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle^r+\langle|V^*|^2\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle^r\right)\\
&\qquad+\frac{1-\gamma}{2}\left|\langle V^2\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^r\\
&\leq\frac{1+\gamma}{4}\left(\langle|V|^{2r}\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle+\langle|V^*|^{2r}\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right)\\
&\qquad+\frac{1-\gamma}{2}\left|\langle V^2\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^r
\end{aligned}$$

((2.1) eşitsizliğinden)

$$\begin{aligned}
&\leq\frac{1+\gamma}{4}\langle(|V|^{2r}+|V^*|^{2r})\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\\
&\qquad+\frac{1-\gamma}{2}\left|\langle V^2\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^r
\end{aligned}\tag{3.2}$$

olur. Ayrıca

$$\left|\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\langle\widehat{\mathrm{k}}_\rho,V^*\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^r=\left|\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^r=\left|\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^r\left|\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^r=\left|\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^{2r} \tag{3.3}$$

eşitsizliği bulunur. Şimdi (3.2) ve (3.3) eşitsizlikleri kombinasyonlanarak

$$\left|\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^{2r}\leq\frac{1+\gamma}{4}\langle(|V|^{2r}+|V^*|^{2r})\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle+\frac{1-\gamma}{2}\left|\langle V^2\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^r$$

eşitsizliği elde edilir. $\rho\in\Omega$ da supremum alarak

$$sup_{\rho\in\Omega}\left|\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^{2r}\leq\frac{1+\gamma}{4}sup_{\rho\in\Omega}\langle(|V|^{2r}+|V^*|^{2r})\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle+\frac{1-\gamma}{2}sup_{\rho\in\Omega}\left|\langle V^2\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^r$$

ve

$$ber^{2r}(V)\leq\frac{1+\gamma}{4}\||V|^{2r}+|V^*|^{2r}\|_{ber}+\frac{1-\gamma}{2}ber^r(V^2)$$

sağlanır. İspat tamamlanır.

Teorem 3.2. $\mathcal{H}=\mathcal{H}(\Omega)$ bir ÜÇHU ve $V,R\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ olsun. Bu durumda $r\geq 1$ ve $\gamma\in[0,1]$ için

$$ber^r(V^*R)\leq\frac{\gamma}{2}\||V|^r+|R|^r\|_{ber}ber^{r/2}(V^*R)+\frac{1-\gamma}{2}ber^2(|V|^r+i|R|^r)$$

elde edilir.

İspat. $\rho\in\Omega$ keyfi bir sabit olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
&\left|\langle V^*R\widehat{\mathrm{k}}_\rho,\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^r\\
&=\left|\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,R\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^r\\
&=\gamma\left|\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,R\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^{r/2}\left|\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,R\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^{r/2}\\
&\qquad+(1-\gamma)\left|\langle V\widehat{\mathrm{k}}_\rho,R\widehat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^r
\end{aligned}$$

$$= \gamma\|V\hat{k}_\rho\|^{r/2}\|R\hat{k}_\rho\|^{r/2}|\langle V\hat{k}_\rho, R\hat{k}_\rho\rangle|^{r/2} + (1-\gamma)\|V\hat{k}_\rho\|^{r}\|R\hat{k}_\rho\|^{r}$$

(Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden)

$$\le \frac{\gamma}{2}\left(\|V\hat{k}_\rho\|^{r} + \|R\hat{k}_\rho\|^{r}\right)|\langle V\hat{k}_\rho, R\hat{k}_\rho\rangle|^{r/2} + \frac{1-\gamma}{2}\left(\|V\hat{k}_\rho\|^{r} + \|R\hat{k}_\rho\|^{r}\right)$$

(Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden)

$$= \frac{\gamma}{2}\left(\langle |V|^2\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle^{\frac{r}{2}} + \langle |V^*|^2\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle^{\frac{r}{2}}\right)|\langle V\hat{k}_\rho, R\hat{k}_\rho\rangle|^{\frac{r}{2}} + \frac{1-\gamma}{2}\left(\langle |V|^2\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle^{r} + \langle |V^*|^2\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle^{r}\right)$$

$$\le \frac{\gamma}{2}\left(\langle |V|^r\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle + \langle |R|^r\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle\right)|\langle V\hat{k}_\rho, R\hat{k}_\rho\rangle|^{\frac{r}{2}} + \frac{1-\gamma}{2}\left(\langle |V|^r\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle^2 + \langle |R|^r\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle^2\right)$$

((2.1) eşitsizliğinden)

$$= \frac{\gamma}{2}\langle (|V|^r + |R|^r)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle|\langle V\hat{k}_\rho, R\hat{k}_\rho\rangle|^{\frac{r}{2}} + \frac{1-\gamma}{2}|(|V|^r + i|R|^r)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho|^2$$

sağlanır. $\rho \in \Omega$ için yukarıdaki eşitsizlikte supremum alarak

$$sup_{\rho\in\Omega}|\langle V^*R\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle|^{r} \le \frac{\gamma}{2}sup_{\rho\in\Omega}\left(\langle (|V|^r + |R|^r)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle|\langle V\hat{k}_\rho, R\hat{k}_\rho\rangle|^{\frac{r}{2}}\right) + \frac{1-\gamma}{2}sup_{\rho\in\Omega}|(|V|^r + i|R|^r)\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho|^2$$

ve

$$ber^r(V^*R) \le \frac{\gamma}{2}\||V|^r + |R|^r\|_{ber}ber^{r/2}(V^*R) + \frac{1-\gamma}{2}ber^2(|V|^r + i|R|^r)$$

ulaşılır. İspat tamamlanır.

Uyarı 3.3. Teorem 3.2 de ifade edilen üst sınır (1.4) eşitsizliğinde verilen üst sınırdan daha küçüktür. $r \ge 2$ ve $\gamma \in [0,1]$ olduğuna dikkat edilerek

$$ber^r(V^*R) \le \frac{\gamma}{2}\||V|^r + |R|^r\|_{ber}ber^{r/2}(V^*R) + \frac{1-\gamma}{2}ber^2(|V|^r + i|R|^r)$$

(Teorem 3.2 den)

$$ber^r(V^*R) \le \frac{\gamma}{2}\||V|^r + |R|^r\|_{ber}ber^{r/2}(V^*R) + \frac{1-\gamma}{2}\||V|^{2r} + |R|^{2r}\|_{ber}$$

((1.5) eşitsizliğinden)

$$ber^r(V^*R) \le \frac{\gamma}{4}\|(|V|^r + |R|^r)^2\|_{ber} + \frac{1-\gamma}{2}\||V|^{2r} + |R|^{2r}\|_{ber}$$

((1.4) eşitsizliğinden)

$$ber^r(V^*R) \le \frac{\gamma}{2}\||V|^{2r} + |R|^{2r}\|_{ber} + \frac{1-\gamma}{2}\||V|^{2r} + |R|^{2r}\|_{ber}$$

((2.2) eşitsizliğinden)

$$= \frac{1}{2}\||V|^{2r} + |R|^{2r}\|_{ber}$$

bulunur.

Aşağıdaki sonuç [4] çalışmasındaki Teorem 2.9'un iyileştirilmiş halidir.

Teorem 3.4. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\Omega)$ bir ÜÇHU ve $V \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ olsun. Bu durumda $r \ge 2$ ve her $\gamma \in [0,1]$ için

$$ber^r(V) \le \frac{\gamma}{2}ber^2\left(|V|^{\frac{r}{2}} + i|V^*|^{\frac{r}{2}}\right) + \frac{1-\gamma}{2}ber^{r/2}(V)\left\||V|^{r/2} + |V^*|^{r/2}\right\|_{ber}$$

sağlanır.

İspat. $\hat{k}_\rho$ normalleştirilmiş üretici çekirdek olsun. Bu durumda

$$|\langle V\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle|^{r}$$
$$= \gamma|\langle V\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle|^{r} + (1-\gamma)|\langle V\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle|^{r}$$
$$\le \gamma\langle |V|\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle^{r/2}\langle |V^*|\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle^{r/2} + (1-\gamma)|\langle V\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle|^{r/2}\langle |V|\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle^{r/4}\langle |V^*|\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle^{r/4}$$

(Karışık Schwarz eşitsizliğinden)

$$\le \frac{\gamma}{2}\left(\langle |V|\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle^{r} + \langle |V^*|\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle^{r}\right) + \frac{1-\gamma}{2}|\langle V\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle|^{r/2}\left(|\langle |V|\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle|^{r/2} + |\langle |V^*|\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle|^{r/2}\right)$$

(Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden)

$$\le \frac{\gamma}{2}\left(\langle |V|^{r/2}\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle^2 + \langle |V^*|^{r/2}\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle^2\right) + \frac{1-\gamma}{2}|\langle V\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle|^{r/2}\langle (|V|^{r/2} + |V^*|^{r/2})\hat{k}_\rho, \hat{k}_\rho\rangle$$

eşitsizliği sağlanır. $\rho \in \Omega$ için yukarıdaki eşitsizlikte supremum alarak

$$\begin{aligned}
&sup_{\rho\in\Omega}\left|\langle V\hat{\mathrm{k}}_\rho, \hat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^r \\
&\leq \frac{\gamma}{2} sup_{\rho\in\Omega}\left(\langle |V|^{r/2}\hat{\mathrm{k}}_\rho, \hat{\mathrm{k}}_\rho\rangle^2 + \langle |V^*|^{r/2}\hat{\mathrm{k}}_\rho, \hat{\mathrm{k}}_\rho\rangle^2\right) \\
&+\frac{1-\gamma}{2} sup_{\rho\in\Omega}\left(\left|\langle V\hat{\mathrm{k}}_\rho, \hat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right|^{r/2}\langle\left(|V|^{r/2}\right.\right. \\
&\qquad\qquad\left.\left. + |V^*|^{r/2}\right)\hat{\mathrm{k}}_\rho, \hat{\mathrm{k}}_\rho\rangle\right)
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Bu da açıktır ki

$$\begin{aligned}
ber^r(V) \leq &\frac{\gamma}{2} ber^2\left(|V|^{\frac{r}{2}} + i|V^*|^{\frac{r}{2}}\right) \\
&+\frac{1-\gamma}{2} ber^{r/2}(V)\left\||V|^{r/2} + |V^*|^{r/2}\right\|_{ber}
\end{aligned}$$

dir.

Uyarı 3.5. Teorem 3.4 de ifade edilen üst sınır (1.7) eşitsizliğinde verilen üst sınırdan daha küçüktür. $r \geq 2$ ve $\gamma \in [0,1]$ olduğuna dikkat edilerek

$$\begin{aligned}
&ber^r(V) \\
&\leq \frac{\gamma}{2} ber^2\left(|V|^{\frac{r}{2}} + i|V^*|^{\frac{r}{2}}\right) \\
&+\frac{1-\gamma}{2} ber^{r/2}(V)\left\||V|^{r/2} + |V^*|^{r/2}\right\|_{ber} \\
&\leq \frac{\gamma}{2}\left\||V|^r + |V^*|^r\right\|_{ber} \\
&+\frac{1-\gamma}{2} ber^{r/2}(V)\left\||V|^{r/2} + |V^*|^{r/2}\right\|_{ber}
\end{aligned}$$

((1.5) eşitsizliğinden)

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\gamma}{2}\left\||V|^r + |V^*|^r\right\|_{ber} \\
&+\frac{1-\gamma}{4} ber^{r/2}(V)\left\|\left(|V|^{r/2} + |V^*|^{r/2}\right)^2\right\|_{ber}
\end{aligned}$$

((1.7) eşitsizliğinden)

$$\leq \frac{\gamma}{2}\left\||V|^r + |V^*|^r\right\|_{ber} + \frac{1-\gamma}{2}\left\||V|^r + |V^*|^r\right\|_{ber}$$

((2.2) eşitsizliğinden)

$$\leq \frac{1}{2}\left\||V|^r + |V^*|^r\right\|_{ber}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

[1] M. Al-Dolat, “General upper bounds for the numerical radii of powers of Hilbert space operators”, The Eurasia Proceedings of Science, Technolojy, Engineering & Mathematics (EPSTEM), 22 (2023), 15-25.

[2] M. Al-Dolat, F. Kittaneh, “Upper bounds for the numerical radii of power Hilbert space operators”, *Quoest. Math.*, (2023), 1-12.

[3] N. Aronzajn, “Theory of reproducing kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68 (1950), 337-404

[4] J. Aujla, F. Silva, “Weak majorization inequalities and convex functions, *Linear Algebra Appl.*, 369 (2003), 217-233.

[5] H. Başaran, M. Gürdal, “Berezin number inequalities via inequality, *Honam Math. J.*, 43(3) (2021), 523-537.

[6] H. Başaran, V. Gürdal, “Berezin radius and Cauchy-Schwarz inequality, *Montes Taurus J. Pure Appl. Math.*, 5(3) (2023), 16-22.

[7] H. Başaran, M.B. Huban, M. Gürdal, “Inequalities related to Berezin norm and Berezin number of operators, *Bull. Math. Anal. Appl.*, 14(2) (2022), 1-11.

[8] F.A. Berezin, “Covariant and contravariant symbols for operators, *Math. USSR-Izvestiya*, 6 (1972), 1117-1151.

[9] M.L. Buzano, “Generalizzatione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz”, *Rend. Semin. Mat. Univ. Politech. Torino*, 31 (1971/73) (1974) 405-409.

[10] I. Chalendar, E. Fricain, M. Gürdal, M. Karaev, "Compactness and Berezin symbols", *Acta Sci. Math.*, 78 (2012), 315-329.

[11] S.S. Dragomir, “Power inequalities for the numerical radius of a product of two operators in Hilbert spaces”, *Sarajevo J. Math.*, 18 (2009), 269-278.

[12] M. Garayev, F. Bouzeffour, M. Gürdal, C.M. Yangöz, "Refinements of Kantorovich type, Schwarz and Berezin number inequalities", *Extracta Math.*, 35(1) (2020), 1-20.

[13] M.T. Garayev, M. Gürdal, A. Okudan, “Hardy-Hilbert's inequality and a power inequality for Berezin numbers for operators”, *Math. Inequal. Appl.*, 19 (2016), 883-891.

[14] M.T. Garayev, H. Guedri, M. Gürdal, G.M. Alsahli, “On some problems for operators on the reproducing kernel Hilbert space”, *Linear Multilinear Algebra*, 69(11) (2021), 2059-2077.

[15] M.T. Garayev, M. Gürdal, S. Saltan, “Hardy type inequaltiy for reproducing kernel Hilbert space operators and related problems”, *Positivity*, 21 (2017), 1615-1623.

[16] M.B. Huban, H. Başaran, M. Gürdal, “New upper bounds related to the Berezin number inequalities”, *J. Inequal. Spec. Funct.*, 12(3) (2021), 1-12.

[17] M. B. Huban, H. Başaran, M. Gürdal, “Some new inequalities via Berezin numbers,” *Turk. J. Math. Comput. Sci.*, 14(1) (2022), 129-137.

[18] M.T. Karaev, “Berezin symbol and invertibility of operators on the functional Hilbert spaces”, *J. Funct. Anal.*, 238 (2006), 181-192.

[19] M.T. Karaev, “Reproducing kernels and Berezin symbols techniques in various questions of operator

theory", *Complex Anal. Oper. Theory*, 7 (2013), 983-1018.

[20] F. Kittaneh, "Notes on some inequalities for Hilbert space operators", *Publ. Res. Ins. Math. Sci.*, 24 (1988), 283-293.

[21] U. Yamancı, R. Tunç, M. Gürdal, "Berezin number, Grüss-type inequalities and their applications", *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 43(3) (2020), 2287-2296.