All Sciences Proceedings
All Sciences Proceedings
http://as-proceeding.com/

1st International Conference on Recent and Innovative Results in Engineering and Technology
August 16-18, 2023 : Konya, Turkey

ICRIRET
https://as-proceeding.com/index.php/icriret

G-Metrik Uzaylarda Çift Diziler ve Yakınsama Tanımları

Saime KOLANCI[1*], Mehmet GÜRDAL [2]

[1]Matematik Bölümü/ Süleyman Demirel Üniversitesi, Türkiye
[2] Matematik Bölümü/ Süleyman Demirel Üniversitesi, Türkiye

*(saimekolanci@sdu.edu.tr)

***Özet* –** Bu çalışmada, G-metrik uzaylarda çift diziler tanıtılmış ve bu dizilerde G-yakınsaklık ve G-Cauchy dizisi tanımları verilmiştir. Bu kavramlarla birlikte G-yakınsaklık bir çift dizinin limit noktasının tek olduğu ve her G-yakınsaklık çift dizinin bir G-Cauchy dizisi olduğu gösterilmiştir. Bunlara ek olarak G-metrik uzaylarda çift diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramı ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler – G-Metrik Uzaylar, Çift Dizi, G-Yakınsaklık, G-Cauchy Dizisi, G-İstatistiksel Yakınsaklık

I. GİRİŞ

Metrik uzay kavramı pür matematikte önemli bir yere sahip olup bu kavramı genelleştirmek için çeşitli çalışmalar yapılmıştır ([5],[7],[14]). Bu çalışmaların ardından Mustafa ve Sims ([16],[17]) çalışmalarında, literatürdeki belirli eksikleri gidererek genelleştirilmiş metrik uzaylar için en doğru notasyonu vermişlerdir. Choi vd. [9] çalışmasında 3 nokta arasındaki uzaklığı veren genelleştirilmiş metrik uzaylara yeni bir bakış açısı kazandırarak bu kavramı $n+1$ nokta arasındaki uzaklığı veren n-inci dereceden genelleştirilmiş metrik uzayları tanıtmışlardır.

Çalışmamızda ele aldığımız temel konulardan bir diğeri, farklı zamanlarda Fast [8] ve Steinhaus [10] tarafından ortaya atılan ve sonrasında birçok önemli çalışmanın yapılmasına öncülük eden istatistiksel yakınsaklıktır (bknz [1],[4],[6],[11],[12],[15]). Choi vd. tarafından tanımlanan g-metrik uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramını Abazari [13] tarafından verilmiştir.

Matematikte her zaman önemli bir yere sahip olan dizi kavramı için, Pringsheim çift dizileri tanıtarak, bu diziler için Pringsheim anlamında yakınsaklık tanımını vermiştir ([2],[3]).

II. MATERYAL VE YÖNTEM

Tanım 1. ℕ pozitif tamsayılar kümesi tarafından kapsanan bir D altkümesinin doğal yoğunluğu,

$$\delta(D) = \lim_{n} \frac{1}{n} |\{k \in D : k \leq n\}|$$

şeklinde tanımlı olup, istatistiksel yakınsaklık kavramı doğal yoğunluk yardımıyla aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Tanım 2. Bir (α_k) sayı dizisi her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\alpha_k - \alpha| \geq \varepsilon\}| = 0$$

sağlanıyorsa (α_k) dizisi, α değerine istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - lim\, \alpha_k = \alpha$ ile gösterilir.
Ayrıca, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |\alpha_k - \alpha_N| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir N pozitif tamsayısı varsa, (α_k) dizisine bir istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Tanım 3. Υ boştan farklı bir küme ve $\mathbb{N}$ pozitif tamsayılar kümesi olmak üzere

$$\alpha: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \Upsilon, \ \ (j,k) \to \alpha_{jk}$$

biçiminde tanımlı fonksiyona bir çift dizi denir ve (α_{jk}) ile gösterilir.

Bir (α_{jk}) çift dizisi her $\varepsilon > 0$ için, bir n_0 pozitif tamsayısı var öyle ki her $j,k \geq n_0$ iken

$$|\alpha_{jk} - \alpha| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu diziye Pringsheim anlamında yakınsaktır denir.

Aynı zamanda, (α_{jk}) çift dizisi her $\varepsilon > 0$ için, bir N pozitif tamsayısı var öyle ki her $p \geq j \geq N$ ve $q \geq k \geq N$ iken

$$|\alpha_{pq} - \alpha_{jk}| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu dizi bir Cauchy dizisidir.

Tanım 4. Υ boştan farklı bir küme olmak üzere $G: \Upsilon \times \Upsilon \times \Upsilon \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu her $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Upsilon$ için;

(G_1) $\alpha = \beta = \gamma$ ise $G(\alpha,\beta,\gamma) = 0$,
(G_2) $\alpha \neq \beta$ ise $G(\alpha,\beta,\gamma) > 0$,
(G_3) $\beta \neq \gamma$ ise $G(\alpha,\alpha,\beta) < G(\alpha,\beta,\gamma)$,
(G_4) $G(\alpha,\beta,\gamma) = G(\alpha,\gamma,\beta) = \cdots$,
(G_5) $G(\alpha,\beta,\gamma) \leq G(\alpha,\delta,\delta) + G(\delta,\beta,\gamma)$

şartlarını sağlıyorsa bu fonksiyona Υ üzerinde bir G-metrik ve (Υ, G) ikilisine de bir G-metrik uzay denir.

Önerme 5. (Υ, G) bir G-metrik uzay olmak üzere her $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Upsilon$ için aşağıdakiler sağlanır:

(i) $G(\alpha,\beta,\gamma) = 0$ ise $\alpha = \beta = \gamma$,
(ii) $G(\alpha,\beta,\gamma) \leq G(\alpha,\alpha,\beta) + G(\alpha,\alpha,\gamma)$,
(iii) $G(\alpha,\beta,\beta) \leq 2G(\alpha,\alpha,\beta)$,
(iv) $G(\alpha,\beta,\gamma) \leq G(\alpha,\delta,\gamma) + G(\delta,\beta,\gamma)$,
(v) $G(\alpha,\beta,\gamma) \leq \frac{2}{3}[G(\alpha,\beta,\delta) + G(\alpha,\delta,\gamma) + G(\delta,\beta,\gamma)]$,
(vi) $G(\alpha,\beta,\gamma) \leq G(\alpha,\delta,\delta) + G(\beta,\delta,\delta) + G(\gamma,\delta,\delta)$.

Tanım 6. (Υ, G) bir G-metrik uzay ve (α_n) bu uzayda bir dizi olsun.

(i) Her $\varepsilon > 0$ için,

$$G(\alpha, \alpha_n, \alpha_m) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ve $n, m \geq n_0$ ise, (α_n) dizisi α noktasına G-yakınsaklık denir.

(ii) Her $\varepsilon > 0$ için,

$$G(\alpha_n, \alpha_m, \alpha_l) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ve $n, m, l \geq n_0$ ise, (α_n) dizisine G-Cauchy dizisi denir.

Abazari [13] tarafından verilen tanıma göre G-metrik uzaylarda istatistiksel yakınsaklık aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 7. $D \in \mathbb{N}^2$ ve $D(n) = \{(i_1, i_2) \in D: i_1, i_2 \leq n\}$ olmak üzere

$$\delta_2(D) = \lim_n \frac{2}{n^2} |D(n)|$$

eşitliğine D kümesinin 2-boyutlu doğal yoğunluğu denir.

Tanım 8. (Υ, G) bir G-metrik uzay ve (α_n) bu uzayda bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{2}{n^2} \left|\left\{(i_1, i_2) \in \mathbb{N}^2: i_1, i_2 \leq n, G\left(\alpha, \alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}\right) \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

sağlanıyorsa (α_n) dizisi, α değerine G-istatistiksel yakınsaktır denir ve $GS - lim\, \alpha_n = \alpha$ veya $\alpha_n \xrightarrow{GS} \alpha$ ile gösterilir.

III. BULGULAR

Tanım 9. (Υ, G) bir G-metrik uzay ve (α_{jk}) bu uzayda bir çift dizi olsun.

(i) Her $\varepsilon > 0$ için,

$$G(\alpha, \alpha_{j_1k_1}, \alpha_{j_2k_2}) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $j_1, j_2 \geq n_0$ ve $k_1, k_2 \geq n_0$ ise, (α_{jk}) dizisi Pringsheim anlamında G-yakınsaktır denir. Burada α, (α_{jk}) dizisinin Pringsheim limitidir.

(ii) Her $\varepsilon > 0$ için,

$$G(\alpha_{j_0k_0}, \alpha_{j_1k_1}, \alpha_{j_2k_2}) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $j_0 \geq j_1 \geq j_2 \geq n_0$ ve $k_0 \geq k_1 \geq k_2 \geq n_0$ ise, (α_{jk}) dizisine bir G-Cauchy dizisi denir.

Önerme 10. Aşağıdaki ifadeler doğrudur:

(i) G-yakınsak bir çift dizinin limiti tektir.
(ii) G-metrik uzaylarda her G-yakınsak çift dizi bir G-Cauchy dizisidir.

İspat:

(i) (Υ, G) bir G-metrik uzay ve (α_{jk}) bu uzayda bir çift dizi olsun. Kabul edelim ki $\alpha, \beta \in \Upsilon$, (α_{jk}) dizisinin farklı iki G-limiti olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için, $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki;

$$G(\alpha, \alpha_{j_1k_1}, \alpha_{j_2k_2}) < \tfrac{\varepsilon}{3} \quad (j_1, j_2 \geq n_1 \text{ ve } k_1, k_2 \geq n_1)$$

ve

$$G(\beta, \alpha_{j_1k_1}, \alpha_{j_2k_2}) < \tfrac{\varepsilon}{3} \quad (j_1, j_2 \geq n_2 \; ve \, k_1, k_2 \geq n_2)$$

elde edilir. $N = maks\{n_1, n_2\}$ alalım. $n_0 \geq N$ ise,

$$\begin{aligned} &G(\alpha, \beta, \beta) \\ &\quad \leq G(\alpha, \alpha_{n_0n_0}, \alpha_{n_0n_0}) + G(\alpha_{n_0n_0}, \beta, \beta) \\ &\quad \leq G(\alpha, \alpha_{n_0n_0}, \alpha_{n_0n_0}) + 2G(\beta, \alpha_{n_0n_0}, \alpha_{n_0n_0}) \\ &\qquad \leq \tfrac{\varepsilon}{3} + 2\tfrac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

olup, burada ε keyfi olduğundan $G(\alpha, \beta, \beta) = 0$ yani $\alpha = \beta$ elde edilir.

(ii) (Υ, G) bir G-metrik uzay ve (α_{jk}) bu uzayda α noktasına G-yakınsak bir çift dizi olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için, bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki;

$$G(\alpha, \alpha_{j_1k_1}, \alpha_{j_2k_2}) < \tfrac{\varepsilon}{2} \; (j_1, j_2 \geq n_0 \text{ ve } k_1, k_2 \geq n_0)$$

Buradan

$$\begin{aligned} &G(\alpha_{j_0k_0}, \alpha_{j_1k_1}, \alpha_{j_2k_2}) \\ &\leq \frac{2}{3}\big[G(\alpha_{j_0k_0}, \alpha_{j_1k_1}, \alpha) + G(\alpha_{j_0k_0}, \alpha, \alpha_{j_2k_2}) \\ &\qquad\qquad + G(\alpha, \alpha_{j_1k_1}, \alpha_{j_2k_2})\big] \\ &\leq \frac{2}{3}\frac{3\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. O halde (α_{jk}) dizisi bir G-Cauchy dizisidir.

Tanım 11. $M \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ kümesi ve

$$M(n, m) = \left\{ \begin{matrix} ((j_1, j_2), (k_1, k_2)) \in M: \\ j_1, j_2 \leq n, \qquad k_1, k_2 \leq m \end{matrix} \right\}$$

olsun. M kümesinin 2-boyutlu doğal yoğunluğu

$$\delta_2(M) = \lim_{n,m} \frac{2}{(nm)^2} |\, M(n, m)|$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 12. (Υ, G) bir G-metrik uzay ve (α_{jk}) bu uzayda bir çift dizi olsun.

(i) Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n,m} \frac{2}{(nm)^2} \left| \left\{ \begin{matrix} j_1, j_2 \leq n, k_1, k_2 \leq m: \\ G\left(\alpha, \alpha_{j_1k_1}, \alpha_{j_2k_2}\right) \geq \varepsilon \end{matrix} \right\} \right| = 0$$

sağlanıyorsa (α_{jk}) dizisi, α değerine G-istatistiksel yakınsaktır denir ve $GS_2 - lim\, \alpha_{jk} = \alpha$ veya $\alpha_{jk} \xrightarrow{GS_2} \alpha$ ile gösterilir. Tüm G-istatistiksel yakınsak çift dizilerin kümesi GS_2 ile gösterilir.

(ii) Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n,m}\frac{2}{(nm)^2}\left|\left\{\begin{matrix} j_1,j_2 \leq n, k_1,k_2 \leq m: \\ G\left(\alpha_{j_0k_0},\alpha_{j_1k_1},\alpha_{j_2k_2}\right) \geq \varepsilon \end{matrix}\right\}\right| = 0$$

olacak biçimde $j_0, k_0 \in \mathbb{N}$ ve $j_0 \leq n,\ , k_0 \leq m$ varsa (α_{jk}) dizisine istatistiksel G-Cauchy dizisi denir.

Teorem 13. Her G-yakınsak çift dizi G-istatistiksel yakınsaktır.

İspat: (α_{jk}), (Υ, G) uzayında α noktasına yakınsak bir çift dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için, $j_1, j_2 \geq n_0$ ve $k_1, k_2 \geq n_0$ olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$G\left(\alpha,\alpha_{j_1k_1},\alpha_{j_2k_2}\right) < \varepsilon$$

olsun.

$$K(n,m) = \left\{\begin{matrix} \left((j_1,j_2),(k_1,k_2)\right) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2: \\ j_1,j_2 \leq n, k_1,k_2 \leq m, \\ G\left(\alpha,\alpha_{j_1k_1},\alpha_{j_2k_2}\right) < \varepsilon \end{matrix}\right\}$$

kümesini ele alalım. Buradan

$$|K(n,m)| \geq \binom{nm - n_0^2}{2}$$

ve

$$\lim_{n,m}\frac{2}{(nm)^2}|K(n,m)| \geq \lim_{n,m}\frac{2}{(nm)^2}\binom{nm - n_0^2}{2} = 1$$

olup, böylece $GS_2 - lim\,\alpha_{jk} = \alpha$ olduğu elde edilir.

Bu teoremin tersi her zaman doğru değildir; yani, (α_{jk}) çift dizisi G-istatistiksel yakınsak iken G-yakınsak olması gerekmez.

Örnek 14. $\Upsilon = \mathbb{R}$ ve $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu

$$G(\alpha,\beta,\gamma) = maks\{|\alpha-\beta|, |\alpha-\gamma|, |\beta-\gamma|\}$$

yukarıdaki gibi tanımlı olsun. Bu uzayda

$$\alpha_{jk} = \begin{cases} jk, & j\ ve\ k\ tam\ kare \\ 0, & diğer\ durumlar \end{cases}$$

biçiminde tanımlı (α_{jk}) çift dizi G-istatistiksel yakınsak iken G-yakınsak değildir.

Teorem 15. G-metrik uzaylarda bir çift dizi G-istatistiksel yakınsak ise bu limit tektir.

İspat: (Υ, G) bir G-metrik uzay ve (α_{jk}) bu uzayda bir çift dizi olmak üzere $\alpha \neq \beta$ için $\alpha_{jk} \xrightarrow{GS_2} \alpha$ ve $\alpha_{jk} \xrightarrow{GS_2} \beta$ olsun. Keyfi $\varepsilon > 0$ için,

$$P(\varepsilon) = \left\{\begin{matrix} \left((j_1,j_2),(k_1,k_2)\right) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2: \\ G\left(\alpha,\alpha_{j_1k_1},\alpha_{j_2k_2}\right) \geq \frac{\varepsilon}{4} \end{matrix}\right\}$$

ve

$$R(\varepsilon) = \left\{\begin{matrix} \left((j_1,j_2),(k_1,k_2)\right) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2: \\ G\left(\beta,\alpha_{j_1k_1},\alpha_{j_2k_2}\right) \geq \frac{\varepsilon}{4} \end{matrix}\right\}$$

olsun. $\alpha_{jk} \xrightarrow{GS_2} \alpha$ ve $\alpha_{jk} \xrightarrow{GS_2} \beta$ olduğundan $\delta_2\left(P(\varepsilon)\right) = 0$ ve $\delta_2\left(R(\varepsilon)\right) = 0$ elde edilir. $S(\varepsilon) = P(\varepsilon) \cup R(\varepsilon)$ alalım, o halde $\delta_2\left(S(\varepsilon)\right) = 0$ olup $\delta_2\left(S^c(\varepsilon)\right) = 1$ elde edilir.
$\left((j_1,j_2),(k_1,k_2)\right) \in S^c(\varepsilon)$ olsun.

$$\begin{aligned} &G(\alpha,\beta,\beta) \\ &\quad \leq G\left(\alpha,\alpha_{j_1k_1},\alpha_{j_1k_1}\right) + G\left(\alpha_{j_1k_1},\beta,\beta\right) \\ &\quad \leq G\left(\alpha,\alpha_{j_1k_1},\alpha_{j_1k_1}\right) + 2G\left(\beta,\alpha_{j_1k_1},\alpha_{j_1k_1}\right) \\ &\quad \leq 2\left[G\left(\alpha,\alpha_{j_1k_1},\alpha_{j_2k_2}\right) + G\left(\beta,\alpha_{j_1k_1},\alpha_{j_2k_2}\right)\right] \\ &\quad < 2\left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}\right) = \varepsilon \end{aligned}$$

olup, ε keyfi olduğundan, $G(\alpha,\beta,\beta) = 0$ elde edilir. Böylece $\alpha = \beta$ olup, limit tektir.

Teorem 16. Her G-istatistiksel yakınsak çift dizi bir istatistiksel G-Cauchy dizisidir.

İspat: (α_{jk}), (Υ, G) uzayında α noktasına G-yakınsak bir çift dizi ve $\varepsilon > 0$ olsun. O halde

$$\lim_{n,m}\frac{2}{(nm)^2}\left|\left\{\begin{matrix} j_1,j_2 \leq n, k_1,k_2 \leq m: \\ G\left(\alpha,\alpha_{j_1k_1},\alpha_{j_2k_2}\right) < \frac{\varepsilon}{6} \end{matrix}\right\}\right| = 1$$

eşitliği sağlanır. Buradan

$$G\left(\alpha_{j_0k_0},\alpha_{j_1k_1},\alpha_{j_2k_2}\right)$$
$$\leq G\left(\alpha_{j_0k_0},\alpha,\alpha\right)+G\left(\alpha_{j_1k_1},\alpha,\alpha\right)+G\left(\alpha_{j_2k_2},\alpha,\alpha\right)$$
$$\leq 2\begin{bmatrix}G\left(\alpha,\alpha_{j_0k_0},\alpha_{j_0k_0}\right)+G\left(\alpha,\alpha_{j_1k_1},\alpha_{j_1k_1}\right)\\ +G\left(\alpha,\alpha_{j_2k_2},\alpha_{j_2k_2}\right)\end{bmatrix}$$
$$\leq 2\begin{bmatrix}G\left(\alpha,\alpha_{j_0k_0},\alpha_{j_1k_1}\right)+G\left(\alpha,\alpha_{j_1k_1},\alpha_{j_2k_2}\right)\\ +G\left(\alpha,\alpha_{j_1k_1},\alpha_{j_2k_2}\right)\end{bmatrix}$$
$$< 2\left(\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}+\frac{\varepsilon}{6}\right)=\varepsilon$$

elde edilir. Böylece (α_{jk}) dizisi istatistiksel G-Cauchy dizidir.

IV. SONUÇLAR

Çalışmamızda, klasik metriğin bir genellemesi olan ve üç nokta arasındaki mesafeyi ölçen G-metrik uzay kavramı ele alınarak bu uzaylarda çift dizi kavramı tanıtılmış ve bu dizilerde G-yakınsaklık ve G-Cauchy dizisi tanımları verilmiştir. Ayrıca bu uzaylardaki çift diziler için istatistiksel yakınsaklık kavramı ele alınarak klasikteki temel teoremler ifade edilmiş olup literatürde ele alınan çalışmalara daha genel bir bakış açısı sunulmuştur.

KAYNAKLAR

[1] A.A. Nabiev, E. Savaş, and M. Gürdal, *Statistically localized sequences in metric spaces*, J. Appl. Anal. Comput., 9(2), (2019), 739-746.

[2] A. Pringsheim, *Elementare Theorie der unendliche Doppel-reihen*, Sitsungsber. Akad. Wiss München, 27, (1897), 101–153.

[3] A. Pringsheim, *Zur Ttheorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen*, Math. Ann., 53, (1900), 289–321.

[4] A. Şahiner, M. Gürdal, and T. Yiğit, *Ideal convergence characterization of the completion of linear n-normed spaces*, Computers & Mathematics with Applications, 61(3), (2011), 683-689.

[5] B. C. Dhage, *Generalized metric space and mapping with fixed point*, Bull. CalcuttaMath. Soc., 84(1), (1992), 329–336.

[6] E. Savaş, and M. Gürdal, *I-statistical convergence in probabilistic normed spaces*, Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys., 77(4), (2015), 195-204.

[7] K. S. Ha, Y. J. Cho, and A. White, *Strictly convex and strictly 2-convex linear 2-normed spaces*, Math. Japon., 33, (1988), 375–384.

[8] H. Fast, *Sur la convergence statistique*, Colloq.Math., 2(3–4), (1951), 241–244.

[9] H. Choi, S. Kim, and S. Yang, *Structure for g-metric spaces and related fixed point theorem*, Arxiv: 1804.03651v1. 2018.

[10] H. Steinhaus, *Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotiqu*, Colloq.Math., 2, (1951), 73–74.

[11] I. J. Schoenberg, *The integrability of certain functions and related summability methods*, Amer. Math. Monthly, 66, (1959), 361–375.

[12] J. A. Fridy, *On statistical convergence*, Analysis (Munich), 5, (1985), 301–314.

[13] R. Abazari, *Statistical convergence in g-metric spaces*, Filomat, 36(5), (2022), 1461–1468.

[14] S. Gahler, *Zur geometric 2-metriche raume*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 11, (1966), 664–669.

[15] U. Yamancı, and M. Gürdal, *On lacunary ideal convergence in random-normed space*, Journal of Mathematics, 2013.

[16] Z. Mustafa, and B. Sims, *Concerninig D-metric spaces*, Proceedings of the Internatinal Conferences on Fixed Point Theory and Applications, Valencia (Spain), (2003), 189–198.

[17] Z. Mustafa, and B. Sims, *A new approach to generalized metric spaces,* J. Nonlinear Convex Anal., 7(2), (2006), 289-297.