2nd International Conference on Scientific and Academic Research

March 14-16, 2023 : Konya, Turkey

All Sciences Proceedings
http://as-proceeding.com/

Dual Fibonacci ve Lucas 3-Parametreli Genelleştirilmiş Kuaterniyonları

Zafer ÜNAL[1*]

[1]*Matematik Bölümü, Fen Fakültesi, Kastamonu Üniversitesi, Türkiye*

(zunal@kastamonu.edu.tr) Başlıca yazarın mail adresi

Özet – Fibonacci sayıları, tam sayı dizileri içinde belki de en ünlü olanıdır. Birçok araştırmacı bu dizi üzerine sayısız çalışma yapmıştır. Aynı indirgeme bağıntısı ile verilen Lucas sayıları da Fibonacci kadar popülaritesi olan sayı dizisidir. Reel terimli dual sayı, kuaterniyonlar, oktonyonlar vb. sistemlerde reel terimler yerine Fibonacci, Lucas vb. tamsayı dizilerinin terimleri kullanılarak yeni yapılar oluşturulmuştur. Bu çalışmada, Dual Fibonacci ve Lucas 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonları tanımlanarak, bunlar için Vajda özdeşliği verilecek ve bunun yardımıyla Catalan, Cassini ve d'Ocagne gibi özdeşlikler elde edilecektir.

Anahtar Kelimeler – Fibonacci ve Lucas Sayıları, Dual Sayılar, 3-Parametreli Genelleştirilmiş Kuaterniyonlar, Binet Formülü, Vajda Özdeşliği

I. GİRİŞ

Fibonacci sayıları, $F_0=0, F_1=1$ başlangıç koşullarına sahip ve $n > 1$ olmak üzere, $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ rekürans bağıntısını sağlayan bir tamsayı dizisidir. Aynı bağıntıda için başlangıç koşulları $L_0=2,\ L_1=1$ alınırsa, Lucas sayıları elde edilir. Bu rekürans bağıntılarında bir terimi bulmak için kendinden önceki iki terime ihtiyaç vardır. Bunun yerine formülü olarak bilinen aşağıdaki bağıntılar daha kullanışlıdır:

$$F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}$$

ve

$$L_n=\alpha^n+\beta^n.$$

Burada $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; $x^2-x-1=0$ karakteristik denkleminin kökleridir. [1]

Sir W. R. Hamilton [2], 1843 yılında reel kuaterniyonları tanımlamıştır. Reel kuaterniyonlar,

$$\mathrm{K}=\{q=a_0e_0+a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3 : a_i\in\mathrm{R}\}$$

şeklinde gösterilir ve $\{e_0=1,e_1,e_2,e_3\}$ kümesi baz vektörleri olmak üzere, kuaterniyonların baz elemanlarının çarpım tablosu aşağıdaki gibidir:

$\cdot$	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1

Sonraki yıllarda, split kuaterniyon, semi-kuaterniyon, değişmeli kuaterniyon gibi değişik versiyonları literatüre kazandırılmıştır.

Şentürk ve Ünal [3], 2022 de yaptıkları çalışmada kuaterniyonlar için 3-parametreli bir genelleştirme vermiştir. $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ keyfi reel sayılar olmak üzere, $\{e_0=1,e_1,e_2,e_3\}$ baz vektörleri için çarpım tablosu

$\cdot$	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	$-\lambda_1\lambda_2$	λ_1e_3	$-\lambda_2e_2$
e_2	e_2	$-\lambda_1e_3$	$-\lambda_1\lambda_3$	λ_3e_1
e_3	e_3	λ_2e_2	$-\lambda_3e_1$	$-\lambda_2\lambda_3$

şeklindedir.

1963 te Horadam [4], Fibonacci kuaterniyonları, Iyer [5] ise, 1969 yılında Lucas kuaterniyonları tanımlamıştır. Daha sonra birçok yazar bu konu üzerine çalışmalar yapmıştır.

Clifford [6], reel sayıları kompleks sayılardakine benzer bir formda dual sayı denen sayı sistemine genişletmiştir. Bir d dual sayısı

$$d = a + \varepsilon b, a, b \in \mathbb{R}, \varepsilon \neq 0, \varepsilon^2 = 0$$

formundadır. ε sayısına dual birim denir ve $\{1, \varepsilon\}$ kümesi dual sayıların bir bazıdır. d dual sayısının eşleniği ve normu $\overline{d} = a - \varepsilon b$ ve $|d| = |a|$ şeklindedir.

Bilgici [7], 2022 de Fibonacci ve Lucas 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonları

$$\mathbb{F}_n = F_n + F_{n+1} i + F_{n+2} j + F_{n+3} k,$$
$$\mathbb{L}_n = L_n + L_{n+1} i + L_{n+2} j + L_{n+3} k$$

şeklinde tanımlamıştır.

II. DUAL FIBONACCI VE LUCAS 3-PARAMETRELİ GENELLEŞTİRİLMİŞ KUATERNİYONLARI

Bu kısımda, dual Fibonacci ve Lucas 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonlarının tanımları ve çalışmanın kalan kısmındaki hesaplamalarda kullanılacak materyaller verilmiştir.

Tanım 1 Dual Fibonacci ve Lucas 3-paramatreli genelleştirilmiş kuaterniyonları

$$DF_n = \mathbb{F}_n + \mathbb{F}_{n+1} \varepsilon, \quad DL_n = \mathbb{L}_n + \mathbb{L}_{n+1} \varepsilon \tag{1}$$

şeklindedir.

Bu tanım yerine genel olarak aşağıdaki teorem ile verilen Binet formüllerini kullanacağız.

Teorem 2 Dual Fibonacci ve Lucas 3-paramatreli genelleştirilmiş kuaterniyonlarının Binet formülleri

$$DF_n = \frac{\alpha' \alpha^n - \beta' \beta^n}{\alpha - \beta}, \quad DL_n = \alpha' \alpha^n + \beta' \beta^n \tag{2}$$

ile verilir. Burada $\alpha' = (1+\varepsilon)\alpha, \alpha = 1 + \alpha e_1 + \alpha^2 e_2 + \alpha^3 e_3$ ve $\beta' = (1+\varepsilon)\beta, \beta = 1 + \beta e_1 + \beta^2 e_2 + \beta^3 e_3$ şeklindedir.

İspat (1) denklemlerinde $\mathbb{F}_n = \dfrac{\alpha\alpha^n - \beta\beta^n}{\alpha - \beta}$ ve $\mathbb{L}_n = \alpha\alpha^n + \beta\beta^n$ [7] eşitlikleri yerlerine yazılırsa istenen elde edilir.

Şimdi hesaplamalar için kullanacağımız lemmayı verelim.

Lemma 3 α ve β Teorem 2 de verilen 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonlar olmak üzere,

$$\alpha\beta = M + \sqrt{5} N, \quad \beta\alpha = M - \sqrt{5} N \tag{3}$$

ve $M = \mathbb{F}_1 + \lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 + e_2 + e_3$, $N = -\lambda_3 e_1 - \lambda_2 e_2 + \lambda_1 e_3$ şeklindedir. [7]

III. SONUÇLAR

Bu bölümde dual Fibonacci ve Lucas 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonları için Vajda özdeşlikleri verilecek ve bunun özel hali olan bazı özdeşliklere değinilecektir.

Teorem 4 n,r,s tamsayıları için dual Fibonacci ve Lucas 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonları için Vajda özdeşlikleri

$$DF_{n+r} DF_{n+s} - DF_n DF_{n+r+s} = (-1)^{n+1} F_r [-MF_s + NL_s](1+\varepsilon) \tag{4}$$

ve

$$DL_{n+r} DL_{n+s} - DL_n DL_{n+r+s} = 5(-1)^n F_r [-MF_s + NL_s](1+\varepsilon) \tag{5}$$

olur.

İspat Tanım 1 deki (1) den

$$\begin{aligned} DF_{n+r} DF_{n+s} - DF_n DF_{n+r+s} &= (\mathbb{F}_{n+r} + \varepsilon \mathbb{F}_{n+r+1})(\mathbb{F}_{n+s} + \varepsilon \mathbb{F}_{n+s+1}) \\ &\quad - (\mathbb{F}_n + \varepsilon \mathbb{F}_{n+1})(\mathbb{F}_{n+r+s} + \varepsilon \mathbb{F}_{n+r+s+1}) \\ &= \mathbb{F}_{n+r}\mathbb{F}_{n+s} - \mathbb{F}_n \mathbb{F}_{n+r+s} \\ &\quad + \varepsilon(\mathbb{F}_{n+r}\mathbb{F}_{n+s+1} - \mathbb{F}_n \mathbb{F}_{n+r+s+1} \\ &\quad + \mathbb{F}_{n+r+1}\mathbb{F}_{n+s} - \mathbb{F}_{n+1}\mathbb{F}_{n+r+s}) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik reel ve dual olmak üzere iki parçadan oluşmaktadır. Reel kısım [] den

$$\mathbb{F}_{n+r}\mathbb{F}_{n+s} - \mathbb{F}_n \mathbb{F}_{n+r+s} = (-1)^{n+1} F_r [-MF_s + NL_s] \tag{6}$$

şeklindedir. (6) yardımıyla dual kısmın ispatını iki aşamada yapacağız.

Eşitlik (6) da s yerine $s+1$ alınırsa,
$$F_{n+r}F_{n+s+1} - F_n F_{n+r+s+1} = (-1)^{n+1} F_r[-MF_{s+1} + NL_{s+1}] \quad (7)$$
ve Eşitlik (6) da n yerine $n+1$, s yerine s-1 yazılırsa,
$$F_{n+r+1}F_{n+s} - F_{n+1}F_{n+r+s} = (-1)^n F_r[-MF_{s-1} + NL_{s-1}] \quad (8)$$
bulunur. (7) ve (8) den
$$\begin{aligned} &F_{n+r}F_{n+s+1} - F_n F_{n+r+s+1} + F_{n+r+1}F_{n+s} - F_{n+1}F_{n+r+s} \\ &= (-1)^{n+1} F_r[-MF_s + NL_s] \end{aligned} \quad (9)$$
elde edilir. Eşitlik (6) ve (9) dan istenen sonuca ulaşılır.

Dual Lucas 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonlar için de benzer işlemler yapılarak ispat tamamlanır.

Vajda özdeşliklerinin sonuçları olan diğer özdeşlikleri verelim.

Sonuç 5 Dual Fibonacci ve Lucas 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonları için Catalan özdeşlikleri aşağıdaki gibidir:
$$DF_{n+r}DF_{n-r} - DF_n^{\ 2} = (-1)^{n+1} F_r[-MF_{-r} + NL_{-r}](1+\varepsilon)$$
$$DL_{n+r}DL_{n-r} - DL_n^{\ 2} = 5(-1)^n F_r[-MF_{-r} + NL_{-r}](1+\varepsilon)$$

İspat (4) ve (5) eşitliklerinde s yerine $-r$ yazılırsa istenen elde edilir.

Sonuç 6 Dual Fibonacci ve Lucas 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonları için Cassini özdeşlikleri
$$DF_{n+1}DF_{n-1} - DF_n^{\ 2} = (-1)^n (M+N)(1+\varepsilon)$$
$$DL_{n+1}DL_{n-1} - DL_n^{\ 2} = 5(-1)^{n+1} (M+N)(1+\varepsilon)$$
şeklindedir.

İspat (4) ve (5) te $s = -r = -1$ yazarsak ispat tamamlanır.

Sonuç 7 Dual Fibonacci ve Lucas 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonları için d'Ocagne özdeşlikleri aşağıdaki gibidir:
$$\begin{aligned} &DF_{n+1}DF_m - DF_n DF_{m+1} \\ &\qquad = (-1)^{n+1}[-MF_{m-n} + NL_{m-n}](1+\varepsilon) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} &DL_{n+1}DL_m - DL_n DL_{m+1} \\ &\qquad = 5(-1)^n[-MF_{m-n} + NL_{m-n}](1+\varepsilon) \end{aligned}$$
İspat (4) ve (5) eşitliklerinde $s=m-n$ ve $r=1$ yazılırsa istenen sonuçlar elde edilmiş olur.

IV. TARTIŞMA

Bu çalışmada dual Fibonacci ve Lucas 3-parametreli genelleştirilmiş kuaterniyonları tanımlanmış, Binet formülleri elde edilmiştir. Önemli özdeşliklerden olan Vajda özdeşlikleri verilmiş ve bunun özel halleri olan Catalan Cassini ve d'Ocagne özdeşlikleri ispata gerek duyulmadan verilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] T. Koshy, *Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications*, New York, USA: Springer-Verlag, 2014.

[2] W. R. Hamilton, "On quaternions; or on a new system of imaginaries in algebra", *Letter to John T. Graves,* 17 October 1843.

[3] T. D. Şentürk and Z. Ünal, "3-parameter generalized quaternions", *Computational Methods and Function Theory,* vol. 22(3), pp. 575-608, 2022

[4] A. F. Horadam, "Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions", *The American Mathematical Monthly,* vol. 70(3), pp. 289-291, 1963.

[5] M. R. Iyer, "A note on Fibonacci quaternions" *Fibonacci Quart.,* vol. 7(3), pp. 225-229, 1969.

[6] W. K. Clifford, "Preliminary sketch of biquaternions", *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol.4, pp. 381-395, 1871.

[7] G. Bilgici, "Fibonacci 3-parameter generalized quaternions" *Avrupa Bilim ve Teknoloji* Dergisi, vol. 41, pp. 357-361, 2022.