Uluslararası İleri Doğa Bilimleri ve Mühendislik Araştırmaları Dergisi
Sayı 8, S. 361-369, 7, 2024
© Telif hakkı IJANSER'e aittir
Araştırma Makalesi

IJANSER

International Journal of Advanced Natural Sciences and Engineering Researches
Volume 8, pp. 361-369, 7, 2024
Copyright © 2024 IJANSER
Research Article

https://as-proceeding.com/index.php/ijanser
ISSN: 2980-0811

k-Periyodik İkinci Mertebeden Lineer Homojen Reküranslı Polinom Dizilerinin Terimlerinin Sıfırları İçin Kompleks Bölge Bulunması

Semih YILMAZ[1*], Elife GÜRDAL [2]

[1]*Aktüerya Bilimleri Bölümü / Fen Bilimleri, Kırıkkale Üniversitesi, Türkiye*
[2]*Matematik Bölümü / Fen Bilimleri, Kırıkkale Üniversitesi, Türkiye*

[*]*(syilmaz@kku.edu.tr)*

(Received: 25 August 2024, Accepted: 29 August 2024)

(5th International Conference on Engineering and Applied Natural Sciences ICEANS 2024, August 25-26, 2024)

ATIF/REFERENCE: Yılmaz, S. & Gürdal, E. (2024). k-Periyodik İkinci Mertebeden Lineer Homojen Reküranslı Polinom Dizilerinin Terimlerinin Sıfırları İçin Kompleks Bölge Bulunması. *International Journal of Advanced Natural Sciences and Engineering Researches*, 8(7), 361-369.

***Özet* –** Bir polinomun kompleks sıfırlarını bazı nümerik yöntemlerle bulabilmek için bu sıfırları içeren bir kompleks bölgenin tespiti gereklidir. Bu çalışmada ikinci mertebeden lineer homojen k-periyodik olan polinom rekürans dizilerinin genel teriminin sıfırlarını içeren bir kompleks bölgeyi veren teorem sunuyoruz.

Anahtar Kelimeler – Polinom Rekürans Dizisi, Fibonacci Polinomları, Bir Matrisin Spektrumu, Gersghorin Teoremi, Brauer Teoremi, Periyodik Rekürans Bağıntılar.

I. GİRİŞ

Ferenc Màtyàs [1],[2] çalışmalarında bir matrisin özdeğerlerinin spektrumu için kullanılan Gershgorin Çember Teoremi ve Brauer Teoremi yardımıyla ikinci mertebeden lineer homojen polinom rekürans dizisinin genel terimi olan polinomun sıfırlarını içeren bir kompleks bölge elde etmiştir. Bir polinomun sıfırlarının bulunduğu kompleks bölgenin bilinmesi, bazı nümerik metotlarla sıfırları bulmak için kolaylık sağlar. Genelde, kompleks bölge ne kadar küçükse nümerik metotlarla sıfırların bulunması daha kolaylaşır. Aynur Oncar [4] tezinde Màtyàs'ın çalışmasını 2-periyodik ikinci mertebeden lineer homojen polinom rekürans dizisine genelleştirmiştir. Bu çalışmada ise Màtyàs'ın çalışmasının k-periyodik ikinci mertebeden lineer homojen polinom rekürans dizisine genelleştirmesini sunacağız.

II. MATERYAL VE YÖNTEM

İlk olarak Màtyàs'ın [1] makalesindeki polinom dizisi ve bu polinom dizisinin genel teriminin sıfırlarına ilişkin tanım ve teoremleri inceleyelim.

Tanım 1: $P(x), Q(x), G_0(x), G_1(x) \in \mathbb{C}[x]$ keyfi başlangıç şartları ve $n \geq 2$ için

$$G_n(x) = P(x)G_{n-1}(x) + Q(x)G_{n-2}(x)$$

rekürans bağıntısı ile tanımlı diziye *ikinci mertebeden lineer rekürans dizi* denir[1].

Teorem 1 (Gershgorin (veya Gershgorin'in Çember) Teoremi): $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ bir kare matris, $n \geq 2$ ve $a_{ij} \in \mathbb{C}$ olsun. $1 \leq i \leq n$ için

$$\mathcal{G}_i = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid \ |w - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{t=1 \\ t\neq i}}^{n} |a_{it}| \right\}$$

olmak üzere A matrisinin tüm özdeğerleri

$$\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{G}_i$$

kümesinin elemanıdır.

Teorem 2 (Brauer (veya Brauer'in Ovalleri) Teoremi): $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ bir kare matris, $n \geq 2$ ve $a_{ij} \in \mathbb{C}$ olsun. $1 \leq i \leq n$ için

$$\mathcal{B}_{ij} = \left\{ w \in \mathbb{C} \mid \ |w - a_{ii}|.\left|w - a_{jj}\right| \leq \left(\sum_{\substack{t=1 \\ t\neq i}}^{n} |a_{it}| \right).\left(\sum_{\substack{t=1 \\ t\neq j}}^{n} \left|a_{jt}\right| \right) \right\}$$

olmak üzere A matrisinin tüm özdeğerleri

$$\mathcal{B} = \bigcup_{1\leq i\leq j\leq n}^{n} \mathcal{B}_{ij}$$

kümesinin elemanıdır.

Teorem 3: Her $n \geq 1$ için,

$$A_n(x) = \begin{bmatrix} G_1(x) & i\sqrt{Q(x)}G_0(x) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ i\sqrt{Q(x)} & P(x) & i\sqrt{Q(x)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & i\sqrt{Q(x)} & P(x) & i\sqrt{Q(x)} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & i\sqrt{Q(x)} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & i\sqrt{Q(x)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & i\sqrt{Q(x)} & P(x) \end{bmatrix}$$

üç bant matrisi olmak üzere

$$G_n(x) = det\big(A_n(x)\big)$$

eşitliği doğrudur[1].

Teorem 4: $n \geq 2$ için, ikinci mertebeden lineer rekürans dizisinin genel terimi olan $G_n(x)$ polinomunun sıfırları

$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \ |G_1(z)| \leq \left|\sqrt{Q(z)}G_0(z)\right| \right\} \cup \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \ |P(z)| \leq 2\left|\sqrt{Q(z)}\right| \right\}$$

ve

$$\{z \in \mathbb{C}| \ |G_1(z)P(z)| \le 2|Q(z)G_0(z)|\} \cup \left\{z \in \mathbb{C}| \ |P(z)| \le 2\left|\sqrt{Q(z)}\right|\right\}$$

kompleks bölgelerinin her ikisinin de elemanıdır[1].

III. BULGULAR

Tanım 2: $a_i(x), b_i(x), v_0(x), v_1(x) \in \mathbb{C}[x]$ keyfi başlangiç şartlari ve $n \ge 2$ için

$$v_n = \begin{cases} a_0(x)v_{n-1}(x) + b_0(x)v_{n-2}(x), & eğer\ n \equiv 0 (\text{mod } k) \\ a_1(x)v_{n-1}(x) + b_1(x)v_{n-2}(x), & eğer\ n \equiv 1 (\text{mod } k) \\ \vdots & \\ a_{k-1}(x)v_{n-1}(x) + b_{k-1}(x)v_{n-2}(x), & eğer\ n \equiv k-1 (\text{mod } k) \end{cases}$$

rekürans bağıntısı ile üretilen diziye *k-periyotlu ikinci mertebeden lineer rekürans dizi* denir[3].

Teorem 5: Her $n \ge 1$ için,

$$H_n(x) = \begin{bmatrix} v_1(x) & b_2(x) & 0 & \cdots & & & & & & 0 \\ -v_0(x) & a_2(x) & b_3(x) & 0 & & & & & & 0 \\ 0 & -1 & a_3(x) & \ddots & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & -1 & \ddots & b_{k-1}(x) & 0 & & & & 0 \\ & \vdots & 0 & \ddots & a_{k-1}(x) & b_0(x) & & \cdots & & 0 \\ & & \vdots & 0 & -1 & a_0(x) & b_1(x) & \ddots & & \vdots \\ & & & \vdots & 0 & -1 & a_1(x) & & & 0 \\ & & & & & & -1 & \ddots & & 0 \\ & & & & & \ddots & & \ddots & & \\ 0 & & & & & & & & & b_j(x) \\ 0 & 0 & \cdots & & & & 0 & 0 & -1 & a_j(x) \end{bmatrix}_{n \times n}$$

üç bant matris ve burada $n \ge 2\ için\ j = n(mod\ k)$ olmak üzere

$$v_n(x) = det\big(H_n(x)\big)$$

eşitliği doğrudur.

İspat: Tümevarım metoduyla:

$n = 1$ için $v_1(x) = |H_1(x)|$ sağlanır; $n = 2$ için $v_2(x) = |H_2(x)|$ sağlanır;

$2 < n \le t$ için $v_\text{n}(x) = |H_\text{n}(x)|$ doğru olsun;

$n = t + 1$ için

$$|H_n(x)| = |H_{t+1}(x)| = \begin{vmatrix} v_1(x) & b_2(x) & \cdots & & 0 \\ -v_0(x) & a_2(x) & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & b_j(x) \\ 0 & 0 & \cdots 0 & -1 & a_j(x) \end{vmatrix}_{(t+1)\times(t+1)}$$

burada $j = t + 1(mod\ k)$ olur, matrisin son satırına göre kofaktör açılımı yaparsak,

$$|H_{t+1}(x)| = (-1).(-1)^{t+1+t} b_{t+1}(x) v_{t-1}(x) + a_{t+1}(x).(-1)^{t+1+t+1}.v_t(x)$$
$$= b_{t+1}(x) v_{t-1}(x) + a_{t+1}(x) v_t(x) = v_{t+1}(x).$$

Böylece tümevarım gereğince ispat tamamlanır. ■

Teorem 6: $n \geq 2$ için v_n polinomlarının tüm sıfırları

$$\mathbb{G} = \left(\bigcup_{i=0}^{k-2} \{w \in \mathbb{C} |\ |a_i(x)| \leq |b_{i+1}(x)| + 1\}\right) \cup \{w \in \mathbb{C} |\ |v_1(x)| \leq |b_2(x)|\}$$
$$\cup \{w \in \mathbb{C} |\ |a_2(x)| \leq |b_3(x)| + |v_0(x)|\} \cup \{w \in \mathbb{C} |\ |a_{k-1}(x)| \leq |b_0(x)| + 1\}$$
$$\cup \left\{w \in \mathbb{C} |\ \left|a_{n\,(mod\ k)}(x)\right| \leq 1\right\}$$

ve

$$\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{C} |\ |v_1(x)||a_2(x)| \leq |b_2(x)|(|b_3(x)| + |v_0(x)|)\}$$
$$\cup \bigcup_{i=3}^{k+2} \{x \in \mathbb{C} |\ |v_1(x)||a_i(x)| \leq |b_2(x)|(|b_{i+1}(x)| + 1)\}$$
$$\cup \left\{x \in \mathbb{C} |\ |v_1(x)|\left|a_{n\,(mod\ k)}(x)\right| \leq |b_2(x)|\right\}$$
$$\cup \bigcup_{i=3}^{k+2} \{x \in \mathbb{C} |\ |a_2(x)||a_i(x)| \leq (|b_3(x)| + |v_0(x)|)(|b_{i+1}(x)| + 1)\}$$
$$\cup \left\{x \in \mathbb{C} |\ |a_2(x)|\left|a_{n\,(mod\ k)}(x)\right| \leq (|b_3(x)| + |v_0(x)|)\right\}$$
$$\cup \left(\bigcup_{i=3}^{k+2} \bigcup_{\substack{j=i+1 \\ j\neq i}}^{k+2} \left\{x \in \mathbb{C} |\ |a_i(x)|\left|a_j(x)\right| \leq (|b_{i+1}(x)| + 1).\left(\left|b_{j+1}(x)\right| + 1\right)\right\}\right)$$
$$\cup \bigcup_{i=3}^{k+2} \left\{x \in \mathbb{C} |\ |a_i(x)|\left|a_{n\,(mod\ k)}(x)\right| \leq (|b_{i+1}(x)| + 1)\right\}$$

kümelerinin elemanlarıdır.

İspat:

$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ $H_n(x)$ matrisinin özdeğerleri olsun, eğer $H_n(x)$ matrisinin karakteristik polinomu

$$P(t) = t^n + c_{n-1}\, t^{n-1} + c_{n-2}\, t^{n-2} + \cdots + c_1 t + (-1)^n det(H_n) = 0$$

ise $P(\lambda_i) = 0$. Böylece $n \geq 2$ için $v_n(x)$ polinomunun bir sıfırı $z_0 \in \mathbb{C}$ ise Teorem 5'den

$$v_n(z_0) = 0 = det\big(H_n(z_0)\big) = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n \Leftrightarrow 0 \text{ bir özdeğerdir.}$$

$H_n(x)$ matrisi n ‘nin $(mod\ k)$ ‘daki değerine göre farklı biçimlerde olacağı için Gershgorin Çember Teoremi ve Brauer Teoremini uygularken önce bu değere göre küme birleşimlerini alarak sonra bir genellemeye gitmek daha kolay olacaktır.

$H_n(x)$ matrisine $n \equiv 1(mod\ k)$ için $(n = \mathrm{m}.k + 1 \geq 2, \exists \mathrm{m} \in \mathbb{Z}^+)$ Gershgorin Çember Teoremi uygulanırsa:

$$|H_{\mathrm{n}}(x)| = |H_{\mathrm{mk+1}}(\mathrm{x})| = \begin{vmatrix} v_1(x) & b_2(\mathrm{x}) & \cdots & & 0 \\ -v_0(\mathrm{x}) & a_2(\mathrm{x}) & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & b_1(\mathrm{x}) \\ 0 & 0 & \cdots 0 & -1 & a_1(\mathrm{x}) \end{vmatrix}_{(mk+1)\times(mk+1)}$$

$$\mathcal{G}_1^1 = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - v_1(\mathrm{x})| \leq |b_2(\mathrm{x})|\}$$
$$\mathcal{G}_2^1 = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_2(\mathrm{x})| \leq |b_3(\mathrm{x})| + |v_0(\mathrm{x})|\}$$
$$\mathcal{G}_3^1 = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_3(\mathrm{x})| \leq |b_4(\mathrm{x})| + 1\} = \mathcal{G}_{3+k}^1 = \mathcal{G}_{3+2k}^1 = \mathcal{G}_{3+3k}^1 = \cdots = \mathcal{G}_{mk-k+3}^1$$
$$\mathcal{G}_4^1 = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_4(\mathrm{x})| \leq |b_5(\mathrm{x})| + 1\} = \mathcal{G}_{4+k}^1 = \mathcal{G}_{4+2k}^1 = \mathcal{G}_{4+3k}^1 = \cdots = \mathcal{G}_{mk-k+4}^1$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{G}_{k-1}^1 = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_{k-1}(\mathrm{x})| \leq |b_0(\mathrm{x})| + 1\} = \mathcal{G}_{2k-1}^1 = \mathcal{G}_{3k-1}^1 = \mathcal{G}_{4k-1}^1 = \cdots = \mathcal{G}_{mk-1}^1$$
$$\mathcal{G}_k^1 = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_0(\mathrm{x})| \leq |b_1(\mathrm{x})| + 1\} = \mathcal{G}_{2k}^1 = \mathcal{G}_{3k}^1 = \mathcal{G}_{4k}^1 = \cdots = \mathcal{G}_{mk}^1$$
$$\mathcal{G}_{k+1}^1 = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_1(\mathrm{x})| \leq |b_2(\mathrm{x})| + 1\} = \mathcal{G}_{2k+1}^1 = \mathcal{G}_{3k+1}^1 = \mathcal{G}_{4k+1}^1 = \cdots = \mathcal{G}_{mk-k+1}^1$$
$$\mathcal{G}_{k+2}^1 = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_2(\mathrm{x})| \leq |b_3(\mathrm{x})| + 1\} = \mathcal{G}_{2k+2}^1 = \mathcal{G}_{3k+2}^1 = \mathcal{G}_{4k+2}^1 = \cdots = \mathcal{G}_{mk-k+2}^1$$
$$\mathcal{G}_{k+3}^1 = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_1(\mathrm{x})| \leq 1\}$$

$$\mathcal{G}^1 = \bigcup_{i=1}^{k+3} \mathcal{G}_i^1 = \left(\bigcup_{i=0}^{k-2} \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_i(x)| \leq |b_{i+1}(\mathrm{x})| + 1\} \right) \cup \{w \in \mathbb{C} |\ |w - v_1(\mathrm{x})| \leq |b_2(\mathrm{x})|\}$$
$$\cup \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_2(\mathrm{x})| \leq |b_3(\mathrm{x})| + |v_0(\mathrm{x})|\} \cup \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_{k-1}(\mathrm{x})| \leq |b_0(\mathrm{x})| + 1\}$$
$$\cup \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_1(\mathrm{x})| \leq 1\}$$

benzer şekilde $n \equiv 2,3,4, \ldots (mod\ k)$ işlemlere devam edilerek,
$H_n(x)$ matrisine $n \equiv k - 1(mod\ k)$ için $(n = \mathrm{m}.k + \mathrm{k} - 1 \geq 2, \exists \mathrm{m} \in \mathbb{Z}^+)$ Gershgorin Çember Teoremi uygulanırsa:

$$|H_{\mathrm{n}}(x)| = |H_{\mathrm{mk+k-1}}(\mathrm{x})| = \begin{vmatrix} v_1(\mathrm{x}) & b_2(\mathrm{x}) & \cdots & & 0 \\ -v_0(\mathrm{x}) & a_2(\mathrm{x}) & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & b_{k-1}(\mathrm{x}) \\ 0 & 0 & \cdots 0 & -1 & a_{k-1}(\mathrm{x}) \end{vmatrix}_{(mk+k-1)\times(mk+k-1)}$$

$$\mathcal{G}_1^{k-1} = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - v_1(\mathrm{x})| \le |b_2(\mathrm{x})|\}$$
$$\mathcal{G}_2^{k-1} = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_2(\mathrm{x})| \le |b_3(\mathrm{x})| + |v_0(\mathrm{x})|\}$$

$$\mathcal{G}_3^{k-1} = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_3(\mathrm{x})| \le |b_4(\mathrm{x})| + 1\} = \mathcal{G}_{3+k}^{k-1} = \mathcal{G}_{3+2k}^{k-1} = \mathcal{G}_{3+3k}^{k-1} = \cdots = \mathcal{G}_{mk-k+3}^{k-1}$$

$$\mathcal{G}_4^{k-1} = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_4(\mathrm{x})| \le |b_5(\mathrm{x})| + 1\} = \mathcal{G}_{4+k}^{k-1} = \mathcal{G}_{4+2k}^{k-1} = \mathcal{G}_{4+3k}^{k-1} = \cdots = \mathcal{G}_{mk-k+4}^{k-1}$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{G}_{k-1}^{k-1} = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_{k-1}(\mathrm{x})| \le |b_0(\mathrm{x})| + 1\} = \mathcal{G}_{2k-1}^{k-1} = \mathcal{G}_{3k-1}^{k-1} = \mathcal{G}_{4k-1}^{k-1} = \cdots = \mathcal{G}_{mk-1}^{k-1}$$

$$\mathcal{G}_k^{k-1} = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_0(\mathrm{x})| \le |b_1(\mathrm{x})| + 1\} = \mathcal{G}_{2k}^{k-1} = \mathcal{G}_{3k}^{k-1} = \mathcal{G}_{4k}^{k-1} = \cdots = \mathcal{G}_{mk}^{k-1}$$

$$\mathcal{G}_{k+1}^{k-1} = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_1(\mathrm{x})| \le |b_2(\mathrm{x})| + 1\} = \mathcal{G}_{2k+1}^{k-1} = \mathcal{G}_{3k+1}^{k-1} = \mathcal{G}_{4k+1}^{k-1} = \cdots = \mathcal{G}_{mk-k+1}^{k-1}$$

$$\mathcal{G}_{k+2}^{k-1} = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_2(\mathrm{x})| \le |b_3(\mathrm{x})| + 1\} = \mathcal{G}_{2k+2}^{k-1} = \mathcal{G}_{3k+2}^{k-1} = \mathcal{G}_{4k+2}^{k-1} = \cdots = \mathcal{G}_{mk-k+2}^{k-1}$$

$$\mathcal{G}_{k+3}^{k-1} = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_{k-1}(\mathrm{x})| \le 1\}$$

buradan

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}^{k-1} &= \bigcup_{i=1}^{k+3} \mathcal{G}_i^{k-1} \\
&= \left(\bigcup_{i=0}^{k-2} \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_i(x)| \le |b_{i+1}(\mathrm{x})| + 1\} \right) \cup \{w \in \mathbb{C} |\ |w - v_1(\mathrm{x})| \le |b_2(\mathrm{x})|\} \\
&\quad \cup \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_2(\mathrm{x})| \le |b_3(\mathrm{x})| + |v_0(\mathrm{x})|\} \cup \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_{k-1}(\mathrm{x})| \le |b_0(\mathrm{x})| + 1\} \\
&\quad \cup \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_{k-1}(\mathrm{x})| \le 1\},
\end{aligned}$$

olacaktır ve son olarak $H_n(x)$ matrisine $n \equiv 0(mod\ k)$ için $(n = \mathrm{m}.k \ge 2, \exists \mathrm{m} \in \mathbb{Z}^+)$ Gershgorin Çember Teoremi uygulanırsa:

$$|H_{\mathrm{n}}(x)| = |H_{\mathrm{mk}}(\mathrm{x})| = \begin{vmatrix} v_1(\mathrm{x}) & b_2(\mathrm{x}) & \cdots & & 0 \\ -v_0(\mathrm{x}) & a_2(\mathrm{x}) & \ddots & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & b_0(\mathrm{x}) \\ 0 & 0 & \cdots 0 & -1 & a_0(\mathrm{x}) \end{vmatrix}_{(mk)\times(mk)}$$

$$\mathcal{G}_1^{0} = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - v_1(\mathrm{x})| \le |b_2(x)|\}$$
$$\mathcal{G}_2^{0} = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_2(\mathrm{x})| \le |b_3(\mathrm{x})| + |v_0(\mathrm{x})|\}$$
$$\mathcal{G}_3^{0} = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_3(\mathrm{x})| \le |b_4(\mathrm{x})| + 1\} = \mathcal{G}_{3+k}^{0} = \mathcal{G}_{3+2k}^{0} = \mathcal{G}_{3+3k}^{0} = \cdots = \mathcal{G}_{mk-k+3}^{0}$$
$$\mathcal{G}_4^{0} = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_4(\mathrm{x})| \le |b_5(\mathrm{x})| + 1\} = \mathcal{G}_{4+k}^{0} = \mathcal{G}_{4+2k}^{0} = \mathcal{G}_{4+3k}^{0} = \cdots = \mathcal{G}_{mk-k+4}^{0}$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{G}_{k-1}^{0} = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_{k-1}(\mathrm{x})| \le |b_0(\mathrm{x})| + 1\} = \mathcal{G}_{2k-1}^{0} = \mathcal{G}_{3k-1}^{0} = \mathcal{G}_{4k-1}^{0} = \cdots = \mathcal{G}_{mk-1}^{0}$$
$$\mathcal{G}_k^{2} = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_0(\mathrm{x})| \le |b_1(\mathrm{x})| + 1\} = \mathcal{G}_{2k}^{0} = \mathcal{G}_{3k}^{0} = \mathcal{G}_{4k}^{0} = \cdots = \mathcal{G}_{mk-k}^{0}$$
$$\mathcal{G}_{k+1}^{0} = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_1(\mathrm{x})| \le |b_2(\mathrm{x})| + 1\} = \mathcal{G}_{2k+1}^{0} = \mathcal{G}_{3k+1}^{0} = \mathcal{G}_{4k+1}^{0} = \cdots = \mathcal{G}_{mk-k+1}^{0}$$
$$\mathcal{G}_{k+2}^{0} = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_2(\mathrm{x})| \le |b_3(\mathrm{x})| + 1\} = \mathcal{G}_{2k+2}^{0} = \mathcal{G}_{3k+2}^{0} = \mathcal{G}_{4k+2}^{0} = \cdots = \mathcal{G}_{mk-k+2}^{0}$$
$$\mathcal{G}_{k+3}^{0} = \{w \in \mathbb{C} |\ |w - a_0(\mathrm{x})| \le 1\}$$

$$\mathcal{G}^0=\bigcup_{i=1}^{k+3}\mathcal{G}_i^0=\left(\bigcup_{i=0}^{k-2}\{w\in\mathbb{C}|\ |w-a_i(x)|\le|b_{i+1}(\mathrm{x})|+1\}\right)\cup\{w\in\mathbb{C}|\ |w-v_1(\mathrm{x})|\le|b_2(\mathrm{x})|\}$$
$$\cup\{w\in\mathbb{C}|\ |w-a_2(\mathrm{x})|\le|b_3(\mathrm{x})|+|v_0(\mathrm{x})|\}\cup\{w\in\mathbb{C}|\ |w-a_{k-1}(\mathrm{x})|\le|b_0(\mathrm{x})|+1\}$$
$$\cup\{w\in\mathbb{C}|\ |w-a_0(\mathrm{x})|\le 1\}$$

elde edilir. Buradan $n\ge 2$ için

$$\mathcal{G}=\left(\bigcup_{i=0}^{k-2}\{w\in\mathbb{C}|\ |w-a_i(x)|\le|b_{i+1}(\mathrm{x})|+1\}\right)\cup\{w\in\mathbb{C}|\ |w-v_1(\mathrm{x})|\le|b_2(\mathrm{x})|\}$$
$$\cup\{w\in\mathbb{C}|\ |w-a_2(\mathrm{x})|\le|b_3(\mathrm{x})|+|v_0(\mathrm{x})|\}\cup\{w\in\mathbb{C}|\ |w-a_{k-1}(\mathrm{x})|\le|b_0(\mathrm{x})|+1\}$$
$$\cup\left\{w\in\mathbb{C}|\ \left|w-a_{n\ (mod\ k)}(\mathrm{x})\right|\le 1\right\}$$

kümesi Gerchgorin çember teoremine göre $H_{\mathrm{n}}(x)$ matrisinin tüm özdeğerlerini içeren bir kümedir. Böylece $w=0$ özdeğer olduğu için

$$\mathbb{G}=\left(\bigcup_{i=0}^{k-2}\{w\in\mathbb{C}|\ |a_i(x)|\le|b_{i+1}(\mathrm{x})|+1\}\right)\cup\{w\in\mathbb{C}|\ |v_1(\mathrm{x})|\le|b_2(\mathrm{x})|\}$$
$$\cup\{w\in\mathbb{C}|\ |a_2(\mathrm{x})|\le|b_3(\mathrm{x})|+|v_0(\mathrm{x})|\}\cup\{w\in\mathbb{C}|\ |a_{k-1}(\mathrm{x})|\le|b_0(\mathrm{x})|+1\}$$
$$\cup\left\{w\in\mathbb{C}|\ \left|a_{n\ (mod\ k)}(\mathrm{x})\right|\le 1\right\}$$

kompleks bölgesi $v_n(\mathrm{x})$ polinomunun tüm sıfırlarını içeren bir bölgedir.

Şimdi $H_n(x)$ matrisine $n\equiv 1(mod\ k)$ için $(n=\mathrm{m}.k+1\ge 2,\exists\mathrm{m}\in\mathbb{Z}^+)$ Brauer'in ovalleri teoremi uygulanırsa:

$$|H_{\mathrm{n}}(x)|=|H_{\mathrm{mk+1}}(\mathrm{x})|=\begin{vmatrix} v_1(x) & b_2(\mathrm{x}) & \cdots & & 0\\ -v_0(\mathrm{x}) & a_2(\mathrm{x}) & \ddots & \cdots & 0\\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots\\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & & & & b_1(\mathrm{x})\\ 0 & 0 & \cdots 0 & -1 & a_1(\mathrm{x}) \end{vmatrix}_{(mk+1)\times(mk+1)}$$

$$\mathcal{B}_{1,2}^1=\{w\in\mathbb{C}|\ |w-v_1(\mathrm{x})||w-a_2(\mathrm{x})|\le|b_2(\mathrm{x})|.(|b_3(\mathrm{x})|+|v_0(\mathrm{x})|)\}$$
$$\mathcal{B}_{1,3}^1=\{w\in\mathbb{C}|\ |w-v_1(\mathrm{x})||w-a_3(\mathrm{x})|\le|b_2(\mathrm{x})|.(|b_4(\mathrm{x})|+1)\}=\mathcal{B}_{1,3+k}^1=\mathcal{B}_{1,3+2k}^1=\cdots=\mathcal{B}_{1,3+(m-1)k}^1$$
$$\mathcal{B}_{1,4}^1=\{w\in\mathbb{C}|\ |w-v_1(\mathrm{x})||w-a_4(\mathrm{x})|\le|b_2(\mathrm{x})|.(|b_5(\mathrm{x})|+1)\}=\mathcal{B}_{1,4+k}^1=\mathcal{B}_{1,4+2k}^1=\cdots=\mathcal{B}_{1,4+(m-1)k}^1$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{B}_{1,k-1}^1=\{w\in\mathbb{C}|\ |w-v_1(\mathrm{x})||w-a_{k-1}(\mathrm{x})|\le|b_2(\mathrm{x})|.(|b_0(\mathrm{x})|+1)\}=\mathcal{B}_{1,2k-1}^1=\mathcal{B}_{1,3k-1}^1=\cdots=\mathcal{B}_{1,mk-1}^1$$
$$\mathcal{B}_{1,k}^1=\{w\in\mathbb{C}|\ |w-v_1(\mathrm{x})||w-a_0(\mathrm{x})|\le|b_2(\mathrm{x})|.(|b_1(\mathrm{x})|+1)\}=\mathcal{B}_{1,2k}^1=\mathcal{B}_{1,3k}^1=\cdots=\mathcal{B}_{1,mk}^1$$
$$\mathcal{B}_{1,k+1}^1=\{w\in\mathbb{C}|\ |w-v_1(\mathrm{x})||w-a_1(\mathrm{x})|\le|b_2(\mathrm{x})|.(|b_2(\mathrm{x})|+1)\}=\mathcal{B}_{1,2k+1}^1=\mathcal{B}_{1,3k+1}^1=\cdots=\mathcal{B}_{1,mk-k+1}^1$$
$$\mathcal{B}_{1,k+2}^1=\{w\in\mathbb{C}|\ |w-v_1(\mathrm{x})||w-a_2(\mathrm{x})|\le|b_2(\mathrm{x})|.(|b_3(\mathrm{x})|+1)\}=\mathcal{B}_{1,2k+2}^1=\mathcal{B}_{1,3k+2}^1=\cdots=\mathcal{B}_{1,mk-k+2}^1$$
$$\mathcal{B}_{1,k+3}^1=\{w\in\mathbb{C}|\ |w-v_1(\mathrm{x})||w-a_1(\mathrm{x})|\le|b_2(\mathrm{x})|\}$$
$$\mathcal{B}_{2,3}^1=\{w\in\mathbb{C}|\ |w-a_2(\mathrm{x})||w-a_3(\mathrm{x})|\le(|b_3(\mathrm{x})|+|v_0(\mathrm{x})|).(|b_4(\mathrm{x})|+1)\}=\mathcal{B}_{2,3+k}^1=\cdots=\mathcal{B}_{2,3+(m-1)k}^1$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{B}_{2,k+1}^1=\{w\in\mathbb{C}|\ |w-a_2(\mathrm{x})||w-a_1(\mathrm{x})|\le(|b_3(\mathrm{x})|+|v_0(\mathrm{x})|).(|b_2(\mathrm{x})|+1)\}=\mathcal{B}_{2,2k+1}^1=\cdots=\mathcal{B}_{2,mk-k+1}^1$$
$$\mathcal{B}_{2,k+2}^1=\{w\in\mathbb{C}|\ |w-a_2(\mathrm{x})|^2\le(|b_3(\mathrm{x})|+|v_0(\mathrm{x})|).(|b_3(\mathrm{x})|+1)\}=\mathcal{B}_{2,2k+2}^1=\cdots=\mathcal{B}_{2,mk-k+2}^1$$
$$\mathcal{B}_{2,k+3}^1=\{w\in\mathbb{C}|\ |w-a_2(\mathrm{x})||w-a_1(\mathrm{x})|\le(|b_3(\mathrm{x})|+|v_0(\mathrm{x})|)\}$$

$$\mathcal{B}_{3,4}^1=\{w\in\mathbb{C}|\,|w-a_3(\mathrm{x})||w-a_4(\mathrm{x})|\le(|b_4(\mathrm{x})|+1).(|b_5(\mathrm{x})|+1)\}=\mathcal{B}_{3,4+k}^1=\cdots=\mathcal{B}_{3,4+(m-1)k}^1$$
$$\mathcal{B}_{3,5}^1=\{w\in\mathbb{C}|\,|w-a_3(\mathrm{x})||w-a_5(\mathrm{x})|\le(|b_4(\mathrm{x})|+1).(|b_6(\mathrm{x})|+1)\}=\mathcal{B}_{3,5+k}^1=\cdots=\mathcal{B}_{3,5+(m-1)k}^1$$
$$\vdots$$
$$\mathcal{B}_{3,k-1}^1=\{w\in\mathbb{C}|\,|w-a_3(\mathrm{x})||w-a_{k-1}(\mathrm{x})|\le(|b_4(\mathrm{x})|+1).(|b_0(\mathrm{x})|+1)\}=\mathcal{B}_{3,2k-1}^1=\cdots=\mathcal{B}_{3,mk-1}^1$$
$$\mathcal{B}_{3,k}^1=\{w\in\mathbb{C}|\,|w-a_3(\mathrm{x})||w-a_0(\mathrm{x})|\le(|b_4(\mathrm{x})|+1).(|b_1(\mathrm{x})|+1)\}=\mathcal{B}_{1,2k}^1=\mathcal{B}_{1,3k}^1=\cdots=\mathcal{B}_{1,mk}^1$$
$$\mathcal{B}_{3,k+1}^1=\{w\in\mathbb{C}|\,|w-a_3(\mathrm{x})||w-a_1(\mathrm{x})|\le(|b_4(\mathrm{x})|+1).(|b_2(\mathrm{x})|+1)\}=\mathcal{B}_{3,2k+1}^1=\cdots=\mathcal{B}_{3,mk-k+1}^1$$
$$\mathcal{B}_{3,k+2}^1=\{w\in\mathbb{C}|\,|w-a_3(\mathrm{x})||w-a_2(\mathrm{x})|\le(|b_4(\mathrm{x})|+1).(|b_3(\mathrm{x})|+1)\}=\mathcal{B}_{3,2k+2}^1=\cdots=\mathcal{B}_{3,mk-k+2}^1$$
$$\mathcal{B}_{3,k+3}^1=\{w\in\mathbb{C}|\,|w-a_3(\mathrm{x})||w-a_1(\mathrm{x})|\le(|b_4(\mathrm{x})|+1)\}$$
$$\vdots$$

benzer şekilde devam ederek,

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^1=\{w\in\mathbb{C}|\,&|w-v_1(\mathrm{x})||w-a_2(\mathrm{x})|\le|b_2(\mathrm{x})|(|b_3(\mathrm{x})|+|v_0(\mathrm{x})|)\}\\
&\cup\bigcup_{i=3}^{k+2}\{w\in\mathbb{C}|\,|w-v_1(\mathrm{x})||w-a_i(\mathrm{x})|\le|b_2(\mathrm{x})|(|b_{i+1}(\mathrm{x})|+1)\}\\
&\cup\{w\in\mathbb{C}|\,|w-v_1(\mathrm{x})||w-a_1(\mathrm{x})|\le|b_2(\mathrm{x})|\}\\
&\cup\bigcup_{i=3}^{k+2}\{w\in\mathbb{C}|\,|w-a_2(\mathrm{x})||w-a_i(\mathrm{x})|\le(|b_3(\mathrm{x})|+|v_0(\mathrm{x})|)(|b_{i+1}(\mathrm{x})|+1)\}\\
&\cup\{w\in\mathbb{C}|\,|w-a_2(\mathrm{x})||w-a_1(\mathrm{x})|\le(|b_3(\mathrm{x})|+|v_0(\mathrm{x})|)\}\\
&\cup\left(\bigcup_{i=3}^{k+2}\bigcup_{\substack{j=i+1\\ j\neq i}}^{k+2}\left\{w\in\mathbb{C}|\,|w-a_i(\mathrm{x})|\left|w-a_j(\mathrm{x})\right|\le(|b_{i+1}(\mathrm{x})|+1).\left(\left|b_{j+1}(\mathrm{x})\right|+1\right)\right\}\right)\\
&\cup\bigcup_{i=3}^{k+2}\{w\in\mathbb{C}|\,|w-a_i(\mathrm{x})||w-a_1(\mathrm{x})|\le(|b_{i+1}(\mathrm{x})|+1)\}
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde $H_n(x)$ matrisine $n\equiv 2,3,4,\ldots\ (mod\ k)$ için Brauer'in ovalleri teoremi uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^{n\ (mod\ k)}=\{w\in\mathbb{C}|\,&|w-v_1(\mathrm{x})||w-a_2(\mathrm{x})|\le|b_2(\mathrm{x})|(|b_3(\mathrm{x})|+|v_0(\mathrm{x})|)\}\\
&\cup\bigcup_{i=3}^{k+2}\{w\in\mathbb{C}|\,|w-v_1(\mathrm{x})||w-a_i(\mathrm{x})|\le|b_2(\mathrm{x})|(|b_{i+1}(\mathrm{x})|+1)\}\\
&\cup\left\{w\in\mathbb{C}|\,|w-v_1(\mathrm{x})|\left|w-a_{n\ (mod\ k)}(\mathrm{x})\right|\le|b_2(\mathrm{x})|\right\}\\
&\cup\bigcup_{i=3}^{k+2}\{w\in\mathbb{C}|\,|w-a_2(\mathrm{x})||w-a_i(\mathrm{x})|\le(|b_3(\mathrm{x})|+|v_0(\mathrm{x})|)(|b_{i+1}(\mathrm{x})|+1)\}\\
&\cup\left\{w\in\mathbb{C}|\,|w-a_2(\mathrm{x})|\left|w-a_{n\ (mod\ k)}(\mathrm{x})\right|\le(|b_3(\mathrm{x})|+|v_0(\mathrm{x})|)\right\}\\
&\cup\left(\bigcup_{i=3}^{k+2}\bigcup_{\substack{j=i+1\\ j\neq i}}^{k+2}\left\{w\in\mathbb{C}|\,|w-a_i(\mathrm{x})|\left|w-a_j(\mathrm{x})\right|\le(|b_{i+1}(\mathrm{x})|+1).\left(\left|b_{j+1}(\mathrm{x})\right|+1\right)\right\}\right)\\
&\cup\bigcup_{i=3}^{k+2}\left\{w\in\mathbb{C}|\,|w-a_i(\mathrm{x})|\left|w-a_{n\ (mod\ k)}(\mathrm{x})\right|\le(|b_{i+1}(\mathrm{x})|+1)\right\}
\end{aligned}$$

kümesi Brauer'in ovalleri teoremine göre $H_{\mathrm{n}}(x)$ matrisinin tüm özdeğerlerini içeren bir kümedir. Böylece $w = 0$ özdeğer olduğu için

$$
\begin{aligned}
\mathbb{B} = \{x \in \mathbb{C} |\ & |v_1(\mathrm{x})||a_2(\mathrm{x})| \leq |b_2(\mathrm{x})|(|b_3(\mathrm{x})| + |v_0(\mathrm{x})|)\} \\
& \cup \bigcup_{i=3}^{k+2} \{x \in \mathbb{C} |\ |v_1(\mathrm{x})||a_i(\mathrm{x})| \leq |b_2(\mathrm{x})|(|b_{i+1}(\mathrm{x})| + 1)\} \\
& \cup \left\{x \in \mathbb{C} |\ |v_1(\mathrm{x})|\left|a_{n\ (mod\ k)}(\mathrm{x})\right| \leq |b_2(\mathrm{x})|\right\} \\
& \cup \bigcup_{i=3}^{k+2} \{x \in \mathbb{C} |\ |a_2(\mathrm{x})||a_i(\mathrm{x})| \leq (|b_3(\mathrm{x})| + |v_0(\mathrm{x})|)(|b_{i+1}(\mathrm{x})| + 1)\} \\
& \cup \left\{x \in \mathbb{C} |\ |a_2(\mathrm{x})|\left|a_{n\ (mod\ k)}(\mathrm{x})\right| \leq (|b_3(\mathrm{x})| + |v_0(\mathrm{x})|)\right\} \\
& \cup \left(\bigcup_{i=3}^{k+2} \bigcup_{\substack{j=i+1 \\ j \neq i}}^{k+2} \left\{x \in \mathbb{C} |\ |a_i(\mathrm{x})|\left|a_j(\mathrm{x})\right| \leq (|b_{i+1}(\mathrm{x})| + 1).\left(\left|b_{j+1}(\mathrm{x})\right| + 1\right)\right\} \right) \\
& \cup \bigcup_{i=3}^{k+2} \left\{x \in \mathbb{C} |\ |a_i(\mathrm{x})|\left|a_{n\ (mod\ k)}(\mathrm{x})\right| \leq (|b_{i+1}(\mathrm{x})| + 1)\right\}
\end{aligned}
$$

kompleks bölgesi $v_n(\mathrm{x})$ polinomunun tüm sıfırlarını içeren bir bölgedir.

IV. TARTIŞMA

Bu çalışmada bazı tip genel rekürans bağıntısı verilmiş kompleks polinom dizilerinin her bir terimi için o terimin sıfırlarını içeren kompleks bölgelerin formülasyonu verilmiştir. Bilinmelidir ki bu bulunacak bölgeler çoğunlukla sınırlı bir bölge olmayacaktır. Aynı zamanda formüllerin Chebyshev Polinom dizileri gibi uzun zamandır bilinen polinom dizilerine uygulanması ile elde edilecek sonuçlar muhtemelen yeni bir bilgi vermeyebilir. Ancak araştırıcıların kendi çalışmalarında elde ettikleri polinom dizileri için daha hızlı sonuç bulmada kullanılabilirler.

Ayrıca burada büyük problem Polinom dizisinin terimlerine eşit determinantlara sahip matrisin seçimidir; şöyle ki, bu matris üç bant matris alınabileceği gibi farklı biçimlerde matris de bulunabilir, hatta kullandığımız üç bant matrisler, esas köşegene göre simetrik olan matris bileşenlerinin çarpımları sabit olmak üzere istenildiği gibi değiştirilebilirler. Böylece elde edilen kompleks bölgeler değişecektir. Dolayısıyla minimal bölgeyi verecek matrisin seçimi esas problem olarak durmaktadır.

V. SONUÇLAR

Bu çalışmada k-periyotlu ikinci mertebeden lineer homojen rekürans bağıntısıyla verilmiş polinom dizilerinin terimlerinin sıfırlarını içeren kompleks bölgeler elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] F. Matyas, "A note on the location of zeros of polynomials defined by Linear Recursions", Acta. Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, vol. 27, pp. 47-52, 2000.

[2] F. Matyas, "Bound for the Zeros of Fibonacci Type Polynomials", Acta. Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae, vol. 25, pp. 17-23, 1998.

[3] D. Panario, M. Sahin, and Q. Wang, "A Family of Fibonacci-like conditional sequences", INTEGERS Electronic Journal of Combinatorial Number Theory. vol. 13, A78, 2013.

[4] A. Oncar, "Bazı Lineer İndirgemeli Polinom Dizilerinin Sıfırları", M. Tur. thesis, Institute of Science, Kırıkkale University, Turkey, Aug. 2019.