Uluslararası İleri Doğa Bilimleri ve Mühendislik Araştırmaları Dergisi
Sayı 7, S. 212-218, 10, 2023

Araştırma Makalesi

IJANSER

https://alls-academy.com/index.php/ijanser
ISSN: 2980-0811

International Journal of Advanced Natural Sciences and Engineering Researches
Volume 7, pp. 212-218, 10, 2023

Research Article

g-Metrik Uzaylarda İdeal Yakınsaklık

Saime KOLANCI[1*], Mehmet GÜRDAL [1]

[1]*Matematik Bölümü, Süleyman Demirel Üniversitesi, Türkiye*

*(saimekolanci@sdu.edu.tr)

(Received: 05 November 2023, Accepted: 13 November 2023)

(2nd International Conference on Contemporary Academic Research ICCAR 2023, November 4-5, 2023)

ATIF/REFERENCE: Kolancı, S. & Gürdal, M. (2023). g-Metrik Uzaylarda İdeal Yakınsaklık. *International Journal of Advanced Natural Sciences and Engineering Researches*, 7(10), 212-218.

Özet **–** Bu çalışmadaki amacımız, temeli doğal sayılar kümesinin altkümelerinin bir idealine dayanan ve istatistiksel yakınsaklık ile ilişkili birçok yakınsaklık çeşidine genel bir bakış açısı sunan ideal yakınsaklık kavramını g-metrik uzaylarda ele almaktır. Klasik anlamda bilinen ideal yakınsaklık kavramından yararlanarak $g\mathcal{I}$-yakınsaklık *ve* $g\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramını tanıtarak burada var olan özellikleri g-metrik uzaylara taşıyoruz. (AP) özelliği yardımıyla $g\mathcal{I}$-yakınsaklık *ve* $g\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramları arasındaki ilişkiyi inceliyoruz. Bunlara ek olarak, g-metrik uzaylarda $g\mathcal{I}$-Cauchy ve $g\mathcal{I}^*$-Cauchy dizileri tanımlarını vererek klasik anlamda bilinen teoremleri ifade ve ispat ediyoruz.

Anahtar Kelimeler – g-metrik uzaylar, $g\mathcal{I}$-yakınsaklık, $g\mathcal{I}^*$-yakınsaklık, $g\mathcal{I}$-Cauchy dizisi, $g\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi

I. GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramının Fast [4] tarafından ortaya atılmasının ardından bu konuyla ilgili çeşitli çalışmalar yapılmış ve farklı yakınsaklık çeşitleri de tanımlanmıştır. Kostyrko vd. [7] çalışmasında istatistiksel yakınsaklıkla bağlantılı birçok yakınsaklık çeşidine daha genel bir bakış açısı sunan ideal yakınsaklık kavramını tanıtmışlardır. Bu çalışmanın ardından Nabiev vd. [9] ideal yakınsaklık kavramıyla birlikte Cauchy dizisi kavramını bir araya getirerek $\mathcal{I}$-Cauchy dizi ve $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi tanımlarını vermişlerdir. Bu çalışmala doğrultusunda çeşitli çalışmalar yapılmıştır (bknz [10,11,12]).

Metrik fonksiyonu iki nokta arasındaki mesafeyi ölçen bir fonksiyondur. Metrik uzay kavramını genelleştirmek adına ilk çalışmalar Gahler [5,6] tarafından yapılmış ve üç nokta arasındaki mesafeyi ölçen yeni bir metrik fonksiyonu tanımlanmıştır. Ancak bu yeni fonksiyon klasik anlamda bilinen metriğin tam bir karşılığı olmadığı için Dhage [3] bu çalışmayı iyileştirerek D-metrik uzayları tanımlamış ancak bu uzayların da bazı topolojik özellikleri sağlamadığı görülmüştür. Bütün bu çalışmaların ardından Mustafa ve Sims [8], metrik uzaylarla bire bir örtüşen en iyi tanımı vererek G-metrik uzayları sunmuşlardır. Choi vd. [2] ise bu çalışmadan yararlanarak en genel haliyle $n+1$ nokta arasındaki mesafeyi ölçen n-inci dereceden g-metrik uzayları tanımlayarak bu uzayın topolojisinden bahsetmişlerdir. Abazari [1] ise bu uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramını tanıtmıştır.

II. MATERYAL VE YÖNTEM

İstatistiksel yakınsaklığın temelini oluşturan doğal yoğunluk kavramını ele alalım. $\mathbb{N}$ kümesinin bir A altkümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(A) = \lim_{n} \frac{|A_n|}{n} = \lim_{n} \frac{1}{n} |\{k \in A : k \leq n\}|$$

biçiminde tanımlanır. Bu tanım yardımıyla istatistiksel yakınsaklık aşağıdaki biçimdedir:

(X,d) bir metrik uzay ve (u_k) bu uzayda bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n: d(u_k, u) \geq \varepsilon\}| = 0$$

sağlanıyorsa, (u_k) dizisi u noktasına istatistiksel yakınsaktır denir ve $st - \lim u_k = u$ şeklinde gösterilir.

İdeal yakınsaklık kavramından bahsetmeden önce, ilk olarak ideal ve filtre tanımlarını vererek aralarındaki ilişkiyi ifade eden önermeyi verelim.

Tanım 1. X boştan farklı bir küme olsun. X kümesinin altkümelerinin bir koleksiyonu $\mathcal{I} \subseteq 2^X$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\mathcal{I}$ koleksiyonuna bir ideal denir.

(i) $\emptyset \in \mathcal{I}$
(ii) $A, B \in \mathcal{I} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{I}$
(iii) $A \in \mathcal{I}, B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{I}$

Eğer $X \notin \mathcal{I}$ ise, $\mathcal{I}$ koleksiyonu bir gerçek ideal olarak adlandırılır. Ayrıca, her $x \in X$ için $\{x\} \in \mathcal{I}$ ise, $\mathcal{I}$ gerçek ideali uygun olarak adlandırılır.

Tanım 2. X boştan farklı bir küme olsun. X kümesinin altkümelerinin boştan farklı bir koleksiyonu olan $\mathcal{F} \subseteq 2^X$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa $\mathcal{F}$ koleksiyonuna bir filtre denir.

(i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$
(ii) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$
(iii) $A \in \mathcal{F}, A \subseteq B \Rightarrow B \in \mathcal{F}$

Önerme 1. X boştan farklı bir küme ve $\mathcal{I}$, X üzerinde bir gerçek ideal olsun. O halde

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subseteq X: \exists A \in \mathcal{I}, M = X \setminus A\}$$

koleksiyonu X üzerinde bir filtredir ve $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ notasyonu $\mathcal{I}$ idealinden üretilen filtreyi ifade eder.

Aşağıdaki tanımlarda (X,d) bir metrik uzay ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ kümesinin altkümelerinin bir koleksiyonu olan gerçek ideal olmak üzere; $\mathcal{I}$-yakınsaklık *ve* $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık şu şekilde tanımlanır:

Tanım 3 [7]. (u_n), X kümesinin elemanlarından oluşan bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N}: d(u_n, u) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

sağlanıyorsa, u noktasına $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir. Burada u noktasına (u_n) dizisinin $\mathcal{I}$-limiti denir ve $\mathcal{I} - \lim u_n = u$ ile gösterilir.

İstatistiksel yakınsaklık teorisinde iyi bilinen bir sonuç aşağıdaki gibidir:

(u_n) reel sayı dizisi u noktasına istatistiksel yakınsaktır gerek ve yeter şart $\delta(M) = 1$ ve $\lim u_{m_k} = u$ olacak biçimde bir

$$M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}$$

kümesi vardır. Bu sonuç $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile yakın ilişkisi olan $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık tanımını vermeye olanak sağlar.

Tanım 4 [7]. X kümesinin elemanlarından oluşan bir (u_n) dizisi için

$$\lim_k d(u_{m_k}, u) = 0$$

olacak biçimde bir

$$M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}$$

kümesi var ve $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ise, (u_n) dizisi u noktasına $\mathcal{I}^*$-yakınsaktır denir. u noktasına (u_n) dizisinin $\mathcal{I}^*$-limiti denir ve $\mathcal{I}^* - \lim u_n = u$ ile gösterilir.

Tanım 5 [7]. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olsun. Eğer $\mathcal{I}$ koleksiyonunun ikili ayrık kümelerinin $\{A_1, A_2, \cdots\}$ ailesi için, $A_i \triangle B_i$ $(i = 1,2,\ldots)$ simetrik farklı sonlu ve $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{I}$ olacak biçimde bir $\{B_1, B_2, \cdots\}$ ailesi varsa, $\mathcal{I}$ uygun idealine (AP) özelliğini sağlıyor denir.

Bu tanım, $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık arasındaki ilişkiyi açıklamada önemli bir rol oynar.

Aşağıdaki tanımlarda (X,d) bir metrik uzay ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ kümesinin altkümelerinin bir koleksiyonu olan uygun ideal olmak üzere; $\mathcal{I}$-Cauchy ve $\mathcal{I}^*$- Cauchy dizileri şu şekilde tanımlanır:

Tanım 6 [9]. (u_n), X kümesinin elemanlarından oluşan bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N}: d(u_n, u_{n_0}) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, (u_n) dizisine bir $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi denir.

Tanım 7 [9]. X kümesinin elemanlarından oluşan bir (u_n) dizisi için

$$\lim_{k,p\to\infty} d\left(u_{m_k}, u_{m_p}\right) = 0$$

olacak biçimde bir

$$M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \subset \mathbb{N}$$

kümesi var ve $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ise, (u_n) dizisine bir $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi denir.

Son olarak, çalışmamızın ilerleyen bölümlerinde kullanacağımız g-metrik uzaylar ve bu uzaydaki istatistiksel yakınsama tanımından bahsedilecektir.

Tanım 8 [2]. X boştan farklı bir küme ve $g: X^{s+1} \to \mathbb{R}$ olsun. Eğer g fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, X üzerinde $s+1$ nokta arasındaki uzaklığı ölçen s-inci dereceden bir g-metriktir denir.

(i) $g(u_0, \dots, u_s) = 0 \Leftrightarrow u_0 = \cdots = u_s$

(ii) $\{0,1,\dots,s\}$ üzerinde herhangi bir σ permütasyonu için
$$g(u_0, \dots, u_s) = g\left(u_{\sigma(0)}, \dots, u_{\sigma(s)}\right)$$

(iii) Her $(u_0, \dots, u_s), (v_0, \dots, v_s) \in X^{s+1}$ ve $\{u_i: i = 0,1,\dots,s\} \subset \{v_i: i = 0,1,\dots,s\}$ için
$$g(u_0, \dots, u_s) \le g(v_0, \dots, v_s)$$

(iv) Her $u_0, \dots, u_k, v_0, \dots, v_m, w \in X$ ve $k + m + 1 = s$ için,
$$\begin{aligned} g(u_0, \dots, u_k, v_0, \dots, v_m) \\ \le g(v_0, \dots, v_k, w, \dots w) \\ + g(v_0, \dots, v_m, w, \dots, w) \end{aligned}$$

(X, g) ikilisine de bir g-metrik uzay denir.

Tanım 9 [2]. (X, g) bir g-metrik uzay, $u \in X$ ve (u_n) bu uzayda bir dizi olsun.

(i) Her $\varepsilon > 0$ için,
$$g\left(u, u_{i_1}, \dots, u_{i_s}\right) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ve $i_1, \dots, i_s \ge n_0$ ise, (u_n) dizisi u noktasına g-yakınsaktır denir ve $g - lim u_n = u$ ile gösterilir.

(ii) Her $\varepsilon > 0$ için,
$$g\left(u_{i_0}, u_{i_1}, \dots, u_{i_s}\right) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var ve $i_0, \dots, i_s \ge n_0$ ise, (u_n) dizisi bir g-Cauchy dizisidir.

g-metrik uzaylarda istatistiksel yakınsaklık kavramından bahsedebilmek için ilk olarak doğal yoğunluk kavramını göz önüne alalım:

$s \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{N}^s$ ve

$$A(n) = \{(i_1, \dots, i_s) \in A: i_1, \dots, i_s \le n\}$$

olsun. O halde

$$\delta_s(A) = \lim_n \frac{s!}{n^s} |A(n)|$$

ifadesi A kümesinin s-boyutlu doğal yoğunluğu olarak adlandırılır.

Tanım 10 [1]. (X, g) bir g-metrik ve (u_n) bu uzayda bir dizi olsun.

(i) Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{s!}{n^s} \left|\left\{i_1, \dots, i_s \le n: g\left(u, u_{i_1}, \dots, u_{i_s}\right) \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

sağlanıyorsa, (u_n) dizisi u noktasına g-istatistiksel yakınsaktır denir ve $gS - lim u_n = u$ ile gösterilir.

(ii) Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_n \frac{s!}{n^s} \left|\left\{i_1, \dots, i_s \le n: g\left(u_{i_0}, u_{i_1}, \dots, u_{i_s}\right) \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

olacak biçimde bir $i_0 \in \mathbb{N}$ varsa, (u_n) dizisi bir istatistiksel g-Cauchy dizisidir.

III. BULGULAR

Aşağıda vereceğimiz tanım ve teoremlerde (X, g) s-inci dereceden bir g-metrik uzay ve $\mathcal{I}_s$, $\mathbb{N}^s$ kümesinin altkümelerinden oluşan bir gerçek ideal olup burada $A \in \mathcal{I}_s$ için
$$A = \{(i_1, \dots, i_s) \in A: i_1, \dots, i_s \in \mathbb{N}\}$$

biçimindedir.

Tanım 11. (u_n), X uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbb{N}^s: g(u,u_{i_1},\ldots,u_{i_s})\geq\varepsilon\}\in\mathcal{I}_s$$

sağlanıyorsa (u_n) dizisi u noktasına $g\mathcal{I}$-yakınsaktır denir ve $g\mathcal{I}-limu_n=u$ ile gösterilir.

Önerme 2. (u_n), X uzayında bir dizi ve $\mathcal{I}_s$ bir uygun ideal olsun. (u_n) dizisi u noktasına g-yakınsak ise bu dizi aynı noktaya $g\mathcal{I}$-yakınsaktır.

İspat. (u_n) dizisi u noktasına g-yakınsak olsun. O halde her $\varepsilon>0$ için,

$$g(u,u_{i_1},\ldots,u_{i_s})<\varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0\in\mathbb{N}$ ve $i_1,\ldots,i_s\geq n_0$. Buradan

$$\{(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbb{N}^s: g(u,u_{i_1},\ldots,u_{i_s})\geq\varepsilon\}$$

kümesi n_0 sayısına bağlı sonlu bir B kümesi tarafından kapsanır. $\mathcal{I}_s$ bir uygun ideal ve $\{B\subset\mathbb{N}^s: B\ sonlu\}\subset\mathcal{I}_s$ olduğundan B, $\mathcal{I}_s$ idealinin bir elemanıdır. Böylece

$$\{(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbb{N}^s: g(u,u_{i_1},\ldots,u_{i_s})\geq\varepsilon\}\in\mathcal{I}_s$$

olup $g\mathcal{I}-limu_n=u$ elde edilir.

Teorem 1. X uzayında $g\mathcal{I}$-yakınsak bir dizinin limiti tektir.

İspat. (u_n), X uzayında bir dizi olmak üzere; $g\mathcal{I}-limu_n=u$, $g\mathcal{I}-limu_n=v$ ve $u\neq v$ olsun. Keyfi $\varepsilon>0$ için,

$$A=\left\{(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbb{N}^s: g(u,u_{i_1},\ldots,u_{i_s})\geq\frac{\varepsilon}{2s}\right\}\in\mathcal{I}_s$$

$$B=\left\{(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbb{N}^s: g(v,u_{i_1},\ldots,u_{i_s})\geq\frac{\varepsilon}{2s}\right\}\in\mathcal{I}_s$$

olur. $A,B\in\mathcal{I}_s$ olduğundan $(\mathbb{N}^s\setminus A)$ ve $(\mathbb{N}^s\setminus B)$ kümeleri $\mathcal{F}(\mathcal{I}_s)$ filtresinin elemanıdır. Filtrenin özelliklerinden

$$\emptyset\neq(\mathbb{N}^s\setminus A)\cap(\mathbb{N}^s\setminus B)\in\mathcal{F}(\mathcal{I}_s)$$

elde edilir. O halde arakesitte en az bir eleman vardır, yani $(u_{i_1},\ldots,u_{i_s})\in(\mathbb{N}^s\setminus A)\cap(\mathbb{N}^s\setminus B)$. Buradan

$$\begin{aligned} g(u,v,\ldots,v) &\leq g(u,u_{i_1},\ldots,u_{i_1})+g(u_{i_1},v,\ldots,v)\\ &\leq g(u,u_{i_1},\ldots,u_{i_1})+sg(v,u_{i_1},\ldots,u_{i_1})\\ &\leq s[g(u,u_{i_1},\ldots,u_{i_s})+g(v,u_{i_1},\ldots,u_{i_s})]\\ &< s\left(\frac{\varepsilon}{2s}+\frac{\varepsilon}{2s}\right)=\varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $u=v$ olup, dizinin limitinin tek olduğu gösterilmiş olur.

Teorem 2. $\mathcal{I}_s$ bir gerçek ideal olsun.

(i) $g\mathcal{I}$-yakınsak iki dizinin toplamı da $g\mathcal{I}$-yakınsaktır.
(ii) $g\mathcal{I}$-yakınsak iki dizinin çarpımı da $g\mathcal{I}$-yakınsaktır.

İspat. (i) (u_n) ve (v_n) dizileri için $g\mathcal{I}-limu_n=u$, $g\mathcal{I}-limv_n=v$ olsun. Keyfi $\varepsilon>0$ için,

$$\left\{(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbb{N}^s: g(u,u_{i_1},\ldots,u_{i_s})\geq\frac{\varepsilon}{2s}\right\}\in\mathcal{I}_s$$

ve

$$\left\{(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbb{N}^s: g(v,v_{i_1},\ldots,v_{i_s})\geq\frac{\varepsilon}{2s}\right\}\in\mathcal{I}_s.$$

Buradan

$$\{(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbb{N}^s: g(u+v,u_{i_1}+v_{i_1},\ldots,u_{i_s}+v_{i_s})\geq\varepsilon\}$$

$$\subseteq\left[\left\{(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbb{N}^s: g(u,u_{i_1},\ldots,u_{i_s})\geq\frac{\varepsilon}{2s}\right\}\cup\left\{(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbb{N}^s: g(v,v_{i_1},\ldots,v_{i_s})\geq\frac{\varepsilon}{2s}\right\}\right]$$

olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece ideal özelliklerinden

$$\{(i_1,\ldots,i_s)\in\mathbb{N}^s: g(u+v,u_{i_1}+v_{i_1},\ldots,u_{i_s}+v_{i_s})\geq\varepsilon\}$$

kümesi $\mathcal{I}_s$ idealinin bir elemanı olup

$$g\mathcal{I}-lim(u_n+v_n)=u+v$$

elde edilir.

(ii) İspatı benzer şekilde yapılabilir.

Tanım 12. X kümesinin elemanlarından oluşan bir (u_n) dizisi için

$$\lim_{k_1,\dots,k_s\to\infty} g\left(u, u_{m_{k_1}}, \dots, u_{m_{k_s}}\right) = 0$$

olacak biçimde bir

$$M^* = \left\{\left(m_{k_1}, \cdots, m_{k_s}\right): m_{k_i} \in M, i = 1, \dots, s\right\} \subset \mathbb{N}^s$$

(burada $M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$) kümesi var ve $M^* \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_s)$ ise, (u_n) dizisi u noktasına $g\mathcal{I}^*$-yakınsaktır.

u noktasına (u_n) dizisinin $g\mathcal{I}^*$-limiti denir ve $g\mathcal{I}^* - limu_n = u$ ile gösterilir.

Teorem 3. $\mathcal{I}_s$ bir uygun ideal olsun. O halde bir (u_n) dizisi $g\mathcal{I}^*$-yakınsak ise, $g\mathcal{I}$-yakınsaktır.

İspat. (u_n) dizisi $g\mathcal{I}^*$-yakınsak olduğundan

$$\begin{aligned} M^* &= \mathbb{N}^s \setminus N \\ &= \left\{\left(m_{k_1}, \cdots, m_{k_s}\right): m_{k_i} \in M, i = 1, \dots, s\right\} \end{aligned}$$

olacak biçimde bir $N \in \mathcal{I}_s$ vardır. Buradan

$$\lim_{k_1,\dots,k_s\to\infty} g\left(u, u_{m_{k_1}}, \dots, u_{m_{k_s}}\right) = 0 \tag{1}$$

elde edilir. Keyfi $\varepsilon > 0$ olsun. (1) den, her $m_{k_1}, \cdots, m_{k_s} \geq m_{k_0}$ için

$$g\left(u, u_{m_{k_1}}, \dots, u_{m_{k_s}}\right) < \varepsilon$$

olacak biçimde $m_{k_0} \in \mathbb{N}$ vardır. O halde

$$\begin{aligned} A &= \left\{(i_1, \dots, i_s) \in \mathbb{N}^s: g\left(u, u_{i_1}, \dots, u_{i_s}\right) \geq \varepsilon\right\} \\ &\subset \left[N \cup \left\{\left(m_{k_1}, \cdots, m_{k_s}\right): m_{k_i} \in \left\{m_1, \dots, m_{k_0}\right\}\right\}\right] \end{aligned} \tag{2}$$

olur. $\mathcal{I}_s$ bir uygun ideal ve $N \in \mathcal{I}_s$ olduğundan (2) de sağ taraftaki küme $\mathcal{I}_s$ koleksiyonunun elemanıdır. Böylece $A \in \mathcal{I}_s$ olup, (u_n) dizisi $g\mathcal{I}$-yakınsaktır.

Aşağıdaki tanımda verilnen (AP) özelliği $g\mathcal{I}$-yakınsaklık ve $g\mathcal{I}^*$-yakınsaklığın denk olması durumu için gerekli ve yeterli bir özelliktir.

Tanım 13. $\mathcal{I}_s$ bir uygun ideal olsun. Eğer $\mathcal{I}_s$ koleksiyonunun ikili ayrık kümelerinin $\{A_1, A_2, \cdots\}$ ailesi için, $A_i \triangle B_i$ $(i = 1,2, \dots)$ simetrik farklı sonlu ve $B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{I}_s$ olacak biçimde bir $\{B_1, B_2, \cdots\}$ ailesi varsa, $\mathcal{I}_s$ uygun idealine (AP) özelliğini sağlıyor denir.

Burada her $j \in \mathbb{N}$ için $B_j \in \mathcal{I}_s$ dir.

Teorem 4. $\mathcal{I}_s$, (AP) özelliğine sahip bir uygun ideal olsun. O halde bir (u_n) dizisi $g\mathcal{I}$-yakınsak ise, $g\mathcal{I}^*$-yakınsaktır.

Tanım 14. $\mathcal{I}_s$ bir uygun ideal ve (u_n), X kümesinin elemanlarından oluşan bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\left\{(i_1, \dots, i_s) \in \mathbb{N}^s: g\left(u_{i_0}, u_{i_1}, \dots, u_{i_s}\right) \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}_s$$

olacak biçimde bir $i_0 \in \mathbb{N}$ varsa, (u_n) dizisine bir $g\mathcal{I}$-Cauchy dizisi denir.

Tanım 15. $\mathcal{I}_s$ bir uygun ideal ve (u_n), X kümesinin elemanlarından oluşan bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{\substack{k_\varepsilon, k_1,\dots,k_s\to\infty \\ m_{k_\varepsilon}\in M}} g\left(u_{m_{k_\varepsilon}}, u_{m_{k_1}}, \dots, u_{m_{k_s}}\right) = 0$$

olacak biçimde bir

$$M^* = \left\{\left(m_{k_1}, \cdots, m_{k_s}\right): m_{k_i} \in M, i = 1, \dots, s\right\} \subset \mathbb{N}^s$$

(burada $M = \{m_1 < m_2 < \cdots < m_k < \cdots\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$) kümesi var ve $M^* \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_s)$ ise, (u_n) dizisine bir $g\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi denir.

Teorem 5. $\mathcal{I}_s$ bir uygun ideal olsun. O halde (u_n) dizisi $g\mathcal{I}$-yakınsak ise, bu dizi $g\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir.

İspat. $g\mathcal{I} - limu_n = u$ olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için,

$$A = \left\{(i_1, \dots, i_s) \in \mathbb{N}^s: g\left(u, u_{i_1}, \dots, u_{i_s}\right) \geq \frac{\varepsilon}{s(s+1)}\right\} \in \mathcal{I}_s$$

olur. $\mathcal{I}_s$ uygun ideal olduğundan $i_0 \notin A$ olacak biçimde bir $i_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$$B = \left\{(i_1, \dots, i_s) \in \mathbb{N}^s: g\left(u_{i_0}, u_{i_1}, \dots, u_{i_s}\right) \geq \varepsilon\right\}$$

olsun. g-metrik uzayların özelliklerinden

$$g\left(u_{i_0}, u_{i_1}, \dots, u_{i_s}\right)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{s} g(u_{i_k}, u, \dots, u)$$
$$\leq s \sum_{k=0}^{s} g(u, u_{i_k}, \dots, u_{i_k})$$
$$\leq s(s+1) g(u, u_{i_1}, \dots, u_{i_s})$$

elde edilir. $i_1, \dots, i_s \in B$ olduğundan,

$$g(u_{i_0}, u_{i_1}, \dots, u_{i_s}) \leq s(s+1) g(u, u_{i_1}, \dots, u_{i_s}) < \varepsilon$$

bulunur. Başka bir deyişle, $i_0 \notin A$ olduğundan

$$g(u_{i_0}, u_{i_1}, \dots, u_{i_s}) < \varepsilon$$

olur ve bu ise bir çelişkidir. Böylece her $\varepsilon > 0$ için, $B \subset A \in \mathcal{I}_s$ sonucuna ulaşırız, yani $B \in \mathcal{I}_s$ olduğundan (u_n) bir $g\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir.

Teorem 6. $\mathcal{I}_s$ bir uygun ideal olsun. O halde (u_n) dizisi $g\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi ise, bu dizi $g\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir.

İspat. (u_n) bir $g\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi olsun. Tanımdan her $\varepsilon > 0$ ve $m_{k_\varepsilon}, m_{k_1}, \dots, m_{k_s} \geq m_{k_0}$ için,

$$g\left(u_{m_{k_\varepsilon}}, u_{m_{k_1}}, \dots, u_{m_{k_s}}\right) < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $M^* \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_s)$,

$$M^* = \left\{\left(m_{k_1}, \cdots, m_{k_s}\right): m_{k_i} \in M, i = 1, \dots, s\right\}$$

vardır. $N = m_{k_0+1}$ alalım. O halde her $\varepsilon > 0$ için,

$$g\left(u_N, u_{m_{k_1}}, \dots, u_{m_{k_s}}\right) < \varepsilon, \quad m_{k_1}, \dots, m_{k_s} \geq m_{k_0}$$

elde edilir. $L = \mathbb{N}^s \setminus M^*$alalım. $L \in \mathcal{I}_s$ ve

$$\begin{aligned} A &= \left\{(i_1, \dots, i_s) \in \mathbb{N}^s : g(u_N, u_{i_1}, \dots, u_{i_s}) \geq \varepsilon\right\} \\ &\subset \left[L \cup \left\{\left(m_{k_1}, \cdots, m_{k_s}\right): m_{k_i} \in \left\{m_1, \dots, m_{k_0}\right\}\right\}\right] \end{aligned} \tag{3}$$

olduğu açıktır. (3) te sağ taraftaki küme $\mathcal{I}_s$ koleksiyonunun bir elemanı olup, buradan $A \in \mathcal{I}_s$ elde edilir. Böylece (u_n) bir $g\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir.

Lemma 1. $\mathcal{I}_s$, (AP) özelliğini sağlayan bir uygun ideal ve $\mathcal{F}(\mathcal{I}_s)$, $\mathcal{I}_s$ idealinden üretilen bir filtre olsun. Her i için $S_i \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_s)$ olmak üzere, $\mathbb{N}^s$ kümesinin altkümelerinin sayılabilir bir ailesi $\{S_i\}_{i=1}^{\infty}$ olsun. O halde $S \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_s)$ ve her i için $S \setminus S_i$ sonlu bir küme olacak biçimde bir $S \subset \mathbb{N}^s$ kümesi vardır.

Teorem 7. $\mathcal{I}_s$, (AP) özelliğine sahip bir uygun ideal olsun. O halde (u_n) dizisi $g\mathcal{I}$-Cauchy dizisi ise, bu dizi $g\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisidir.

İspat. (u_n) bir $g\mathcal{I}$-Cauchy dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{(i_1, \dots, i_s) \in \mathbb{N}^s : g(u_{i_0}, u_{i_1}, \dots, u_{i_s}) \geq \varepsilon\right\} \in \mathcal{I}_s$$

olacak biçimde bir $i_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

$$S_i = \left\{(i_1, \dots, i_s) \in \mathbb{N}^s : g\left(u_{m_{k_i}}, u_{i_1}, \dots, u_{i_s}\right) < \frac{1}{i}\right\}$$

ve $m_{k_i} = i_0\left(\frac{1}{i}\right)$ alalım. Her $i = 1,2 \dots$ için $S_i \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_s)$ olduğu açıktır. $\mathcal{I}_s$, (AP) özelliğini sağladığından, o halde Lemma 1'den $S \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_s)$ ve her i için $S \setminus S_i$ sonlu bir küme olacak biçimde $S \subset \mathbb{N}^s$ kümesi vardır. Gösterelim ki

$$\lim_{\substack{k_\varepsilon, k_1, \dots, k_s \to \infty \\ m_{k_\varepsilon} \in M}} g\left(u_{m_{k_\varepsilon}}, u_{m_{k_1}}, \dots, u_{m_{k_s}}\right) = 0.$$

$\varepsilon > 0$ ve $j \in \mathbb{N}$ için $j > \frac{1+s}{\varepsilon}$ alalım. $k_\varepsilon, k_1, \dots, k_s \in S$ ise, $S \setminus S_j$ sonludur. Böylece $k_\varepsilon, k_1, \dots, k_s \geq p(j)$ için $k_\varepsilon, k_1, \dots, k_s \in S_j$ olacak biçimde $p = p(j)$ vardır. O halde

$$\begin{aligned} & g\left(u_{m_{k_\varepsilon}}, u_{m_{k_1}}, \dots, u_{m_{k_s}}\right) \\ & \leq g\left(u_{m_{k_\varepsilon}}, u_{i_1}, \dots, u_{i_1}\right) + g\left(u_{i_1}, u_{m_{k_1}}, \dots, u_{m_{k_s}}\right) \\ & \leq \cdots \\ & \leq g\left(u_{m_{k_\varepsilon}}, u_{i_1}, \dots, u_{i_1}\right) + \sum_{i=1}^{s} g\left(u_{m_{k_i}}, u_{i_1}, \dots, u_{i_1}\right) \\ & \leq g\left(u_{m_{k_\varepsilon}}, u_{i_1}, \dots, u_{i_1}\right) + \sum_{i=1}^{s} g\left(u_{m_{k_i}}, u_{i_1}, \dots, u_{i_s}\right) \\ & \leq \frac{1}{j} + \frac{s}{j} < \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak (u_n) bir $g\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisidir.

IV. SONUÇLAR

Bu çalışmada metrik uzaylarda tanımlanan $\mathcal{I}$-yakınsaklık, $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık, $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi ve $\mathcal{I}^*$-

Cauchy dizisi kavramları g-metrik uzaylara taşınmış ve bu kavramların bazı özellikleri ve bilinen sonuçları ifade ve ispat edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] R. Abazari, "Statistical convergence in g-metric spaces", *Filomat*, 36 (5), (2022), 1461-1468.
[2] H. Choi, S. Kim, and S. Yang, "Structure for g-metric spaces and related fixed point theorem", Arxive: 1804.03651v1. (2018).
[3] B.C. Dhage, "Generalized metric space and mapping with fixed point", *Bull. Cal. Math. Soc.*, 84 (1992), 329-336.
[4] H. Fast, "Sur la convergence statistique", *Colloq. Math.*, 2 (1951), 241-244.
[5] S. Gahler, "2-metriche raume und ihre topologische structure", *Math. Nachr.*, 26 (1963), 115-148.
[6] S. Gahler, "Zur geometric 2-metriche raume", *Reevue Roumaine de Math. Pures et Appl.*, XI (1966), 664-669.
[7] P. Kostyrko, T. Salát, and W. Wilczynski, "I-Convergence", *Real Anal. Exchange*, 26 (2) (2000/2001), 669-686.
[8] Z. Mustafa, and B. Sims, "A new approach to generalized metric spaces", *J. Nonlinear Convex Anal.*, (2006), 289-297.
[9] A. Nabiev, S.Pehlivan, and M. Gürdal, "On I-Cauchy sequences", *Taiwanese J. Math.*, 11 (2) (2007), 569-576.
[10] E. Savaş, M. Gürdal, "I-statistical convergence in probabilistic normed spaces", *Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys.*, 77(4) (2015), 195-204.
[11] A. Şahiner, M. Gürdal, T. Yiğit, "Ideal convergence characterization of the completion of linear n-normed spaces", *Comput. Math. Appl.*, 61(3) (2011), 683-689.
[12] U. Yamancı, M. Gürdal, "On lacunary ideal convergence in random n-normed space", *J. Math.*, 2013, Article ID 868457, 8 pages, (2013).