Uluslararası İleri Doğa Bilimleri ve Mühendislik Araştırmaları Dergisi
Sayı 7, S. 219-224, 10, 2023

Araştırma Makalesi

International Journal of Advanced Natural Sciences and Engineering Researches
Volume 7, pp. 219-224, 10, 2023

Research Article

IJANSER
https://alls-academy.com/index.php/ijanser
ISSN: 2980-0811

Üçlü Diziler İçin Kuvvetli Lacunary I*-Yakınsaklık

Mehmet Gürdal[1], Saime Kolancı[*,1]

Matematik Bölümü / Fen Edebiyat Fakültesi / Süleyman Demirel Üniversitesi, Türkiye

[*]*(saimekolanci@sdu.edu.tr)*

(Received: 05 November 2023, Accepted: 13 November 2023)

(2nd International Conference on Contemporary Academic Research ICCAR 2023, November 4-5, 2023)

ATIF/REFERENCE: Gürdal, M. & Kolancı, S. (2023). Üçlü Diziler İçin Kuvvetli Lacunary I*-Yakınsaklık. *International Journal of Advanced Natural Sciences and Engineering Researches*, 7(10), 219-224.

Özet – İstatistiksel yakınsama ilk olarak 1951 yılında Fast [6] tarafından çalışılmıştır. Fridy ve Orhan [8], lacunary dizisini kullanarak lacunary istatistiksel yakınsamayı incelemişlerdir. Kostyrko ve diğerleri [14] doğal sayı kümesi üzerindeki idealleri kullanarak ideal yakınsamayı sunmuşlardır. Bu makalenin ikinci yazarı ve çalışma grubu tarafından $\mathcal{I}$-Cauchy, $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi ve üçlü dizi kavramları literatüre kazandırılmıştır. Bu çalışmada ise üçlü diziler için lacunary $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık ve kuvvetli lacunary $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramları tanımlanmıştır. Ayrıca, üçlü diziler için kuvvetli lacunary $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve kuvvetli lacunary $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık arasındaki ilişkiler araştırılmıştır. Son olarak, kuvvetli lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy üçlü dizisi kavramı tanımlanmış ve kuvvetli lacunary $\mathcal{I}$-Cauchy üçlü dizisi ile kuvvetli lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy üçlü dizisi arasındaki ilişkiler araştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler – Lacunary dizi, üçlü dizi, ideal yakınsaklık, $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık, (AP3) koşulu, Cauchy dizisi

I. GİRİŞ

Fast [6], istatistiksel yakınsama olarak adlandırılan olağan sıralı limit kavramının bir genellemesini sunmuştur. Salat [22] istatistiksel yakınsamanın bazı temel özelliklerini vermiştir. Son zamanlarda, Mursaleen ve Edely [16] çoklu diziler için istatistiksel yakınsama fikrini sunmuştur ve ikili ve üçlü dizilerin istatistiksel ve ideal yakınsaması üzerine birkaç makale vardır (bkz. [2, 9, 11, 13, 19]). Fridy ve Orhan [8] lacunary istatistiksel yakınsama kavramını tanımlamıştır. Bu kavramın çeşitli uygulamaları [1, 4, 7, 12, 24, 25] çalışmalarında bulunabilir. Bu fikir, aşağıdaki gibi tanımlanan tüm pozitif tam sayıların kümesi olan $\mathbb{N}$'nin alt kümelerinin doğal yoğunluğu kavramına dayanmaktadır: $\mathbb{N}$'nin $\delta(A)$ olarak tanımlanan bir A altkümesinin doğal yoğunluğu $\delta(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\leq n : k\in A\}\right|$ ile tanımlanır. İstatistiksel yakınsama kavramını genelleştiren Kostyrko ve diğerleri [14]'te $\mathcal{I}$-yakınsama fikrini ortaya atmışlardır. Bu yönde daha fazla araştırma ve ideallerin daha fazla uygulaması [9, 10, 17, 20, 23, 24] çalışmalarında bulunabilir.

Dizi yakınsaması matematiğin temel teorisinde çok önemli bir rol oynadığından, toplanabilirlik teorisinde, klasik ölçü teorisinde, yaklaşım teorisinde ve olasılık teorisinde birçok yakınsama kavramı vardır ve bunlar arasındaki ilişkiler tartışılmaktadır. İlgilenen okuyucu, dizi uzayları ve ilgili konular hakkında arka plan için Gürdal ve Huban [9] ve Nabiev ve diğerleri [18], [3] ve [15] monograflarına başvurabilir. Bundan esinlenerek, bu makalede üçlü dizilerin matematiksel özellikleri üzerine daha ileri bir araştırma yapılacaktır. Bölüm 2'de bazı tanımlar ve notasyonlar hatırlatılmaktadır. Bölüm 3'de, üçlü diziler için lacunary $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık ve kuvvetli lacunary $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramları çalışılmıştır. Üçlü diziler için kuvvetli lacunary $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve kuvvetli lacunary $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramları arasındaki bağıntılar incelenmiştir. Ayrıca, kuvvetli lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy üçlü dizi kavramı tanımlanmış ve kuvvetli lacunary $\mathcal{I}$-Cauchy üçlü dizi ve kuvvetli lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy üçlü dizi kavramları arasındaki kapsamalar incelenmiştir.

II. MATERYAL VE YÖNTEM

Öncelikle bu makalede kullanılacak olan bazı temel kavramları hatırlayalım. $\mathbb{N}$ ve $\mathbb{R}$ ile sırasıyla tüm doğal ve reel sayıların kümelerini kastediyoruz.

İstatistiksel yakınsama kavramı, doğal sayılardan oluşan $\mathbb{N}$ kümesinin alt kümelerinin yoğunluğuna bağlıdır. Eğer K kümesi $\mathbb{N}$'nin bir altkümesi ise K_n ifadesi $\{k \in K : k \le n\}$ kümesi ile tanımlıdır ve $|K_n|$ ise K_n.kümesinin kardinelitisi olarak gösterilir. K'nın doğal yoğunluğu

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|K_n|$$

ile verilir. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{k \in \mathbb{N} : |x_k - \ell| \ge \varepsilon\}) = 0$$

eşitliği sağlanırsa, bir $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi ℓ değerine istatistiksel yakınsaktır denir.

İstatistiksel yakınsama kavramı, $\mathbb{N}$ kümesinin alt kümelerinin bir ideali kavramı kullanılarak [14] makalesinde daha da genelleştirilmiştir. Eğer $B \subset A \in \mathcal{I} \Rightarrow B \in \mathcal{I}$ ve $A, B \in \mathcal{I}$ ise $A \cup B \in \mathcal{I}$ koşulları sağlanır ise $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ kümesinin boştan farklı bir ailesine $\mathbb{N}$ üzerinde bir ideal denir. $\mathcal{I} \ne \mathcal{P}(\mathbb{N})$ koşulunu sağlayan $\mathbb{N}$ üzerinde bir $\mathcal{I}$ idealine uygun ideal adı verilir. Eğer $\mathcal{I}$ ideali $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu alt kümelerini içeriyorsa $\mathcal{I}$ uygun idealine gerçek ideal denir. Aksi söylenmedikçe çalışmamızda $\mathcal{I}$ bir gerçek ideal olarak tanımlanacaktır. $\mathcal{I} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ bir özdeş olmayan ideal olsun. Bir $\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subset \mathbb{N} : \exists A \in \mathcal{I} : M = \mathbb{N} \setminus A\}$ sınıfı $\mathbb{N}$ üzerinde $\mathcal{I}$ ideali ile ilişkili olacak şekilde filtre olarak tanımlayabiliriz.

İstatistiksel yakınsamanın [14]'teki genellemesini hatırlayalım. $\mathcal{I}$ ideali $\mathbb{N}$ üzerinde bir gerçek ideal ve $x = (x_k)$ ise bir reel dizi olsun. O zaman her bir $\varepsilon > 0$ için $A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : |x_k - \ell| \ge \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ kümesi sağlanıyorsa x dizisi $\ell \in \mathbb{R}$ ye $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir. $\mathbb{N}$'nin tüm sonlu altkümelerinin idealini $\mathcal{I}_f$ ile gösterelim. O zaman $\mathcal{I}_f$ özdeş olmayan gerçek ideal olup $\mathcal{I}_f$-yakınsaklık ile adi anlamdaki yakınsaklık çakışır.

$\mathcal{I}$-yakınsaklık hakkında daha fazla bilgi için [17] çalışması ve kaynakları önerilir.

Şimdi [19, 21]'de yer alan ve çalışma boyunca ihtiyaç duyulacak olan aşağıdaki temel kavramları hatırlayalım.

Bir $x : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) fonksiyonuna reel (karmaşık) üçlü dizi denir. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $j,k,l \ge n_0$ $|x_{jkl} - \ell| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mevcut ise (x_{jkl}) üçlü dizisine Pringsheim anlamında ℓ değerine yakınsaktır denir.

Tanım 1. Eğer

$$\delta(K) = P - \lim_{n,k,l\to\infty} \frac{|K_{nkl}|}{nkl}$$

mevcut ise $\mathbb{N}^3$'nin bir K altkümesine $\delta(K)$ doğal yoğunluğuna sahiptir denir. Burada dikey çubuk gösterimi $p \le n,\ \ q \le k,\ \ r \le l$ olacak şekilde K kümesindeki (n,k,l)'nın sayısını tanımlar. O zaman bir $x = (x_{nkl})$ üçlü dizisinin Pringsheim anlamında ℓ değerine istatistiksel yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta(\{(n,k,l) \in \mathbb{N}^3 : |x_{nkl} - \ell| \ge \varepsilon\}) = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Çalışma boyunca $\mathcal{P}(\mathbb{N})$'nın ideallerini $\mathcal{I}$ ile, $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$'nin ideallerini $\mathcal{I}_2$ ile ve $\mathcal{P}(\mathbb{N}^3)$'nin ideallerini $\mathcal{I}_3$ gösterimleri ile vereceğiz.

Tanım 2. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\{(n,k,l) \in \mathbb{N}^3 : |x_{nkl} - \ell| \ge \varepsilon\} \in \mathcal{I}_3$$

ise (x_{nkl}) üçlü dizisine ℓ değerine $\mathcal{I}_3$-yakınsaktır denir. Bu durumda $\mathcal{I}_3\text{-}\lim x_{nkl} = \ell$ ile gösterebiliriz.

$k_0 = 0$ ve $r = 0,1,2,...$ olsun. Bir lacunary $\theta = (k_r)$ dizisi ile $r \to \infty$ iken $k_r - k_{r-1}$ ile negatif olmayan tamsayıların bir artan dizisi olarak verebiliriz. θ ile belirlenen aralık $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ve $h_r = k_r - k_{r-1}$ ile tanımlanır. Burada $\frac{k_r}{k_{r-1}}$ oranı q_r ile tanımlanacaktır.

Tanım 3 *([5]*). Eğer

$$j_0 = 0,\ h_r = j_r - j_{r-1} \to \infty, r \to \infty \text{ iken}$$
$$k_0 = 0,\ h_s = k_s - k_{s-1} \to \infty, s \to \infty \text{ iken}$$

ve

$$l_0 = 0,\ h_t = l_t - l_{t-1} \to \infty, t \to \infty \text{ iken}$$

olacak şekilde tamsayıların üç artan dizisi mevcut ise $\theta_3 = \theta_{r,s,t} = \{(j_r, k_s, l_t)\}$ üçlü dizisine üçlü lacunary dizi adı verilir.

$k_{r,s,t} = j_r k_s l_t, h_{r,s,t} = h_r h_s h_t$ olsun. $\theta_{r,s,t}$ ise

$$I_{r,s,t} = \{(j,k,l) : j_{r-1} < j \le j_r, k_{s-1} < k \le k_s \text{ ve } l_{t-1} < l \le l_t\},$$

$$q_r = \frac{j_r}{j_{r-1}}, q_s = \frac{k_s}{k_{s-1}}, q_t = \frac{l_t}{l_{t-1}} \text{ ve } q_{r,s,t} = q_r q_s q_t$$

ile belirleyelim. $D \subset \mathrm{N}^3$ olmak üzere

$$\delta_3^{\theta}(D) = \lim_{r,s,t} \frac{1}{h_{r,s,t}} \left| \{(j,k,l) \in I_{r,s,t} : (j,k,l) \in D\} \right|$$

sayısına (limiti mevcut olması şartıyla) D'nin $\theta^3_{r,s,t}$-yoğunluğu denir.

Bu makalede ihtiyaç duyulan diğer tanımlar ve özellikler [1, 11, 13, 20] çalışmalarında gösterilmiştir.

III. BULGULAR

Bu bölümde, üçlü diziler kavramını sunacağız ve kuvvetli lacunary $\mathtt{I}$-yakınsama ve kuvvetli lacunary $\mathtt{I}^*$-yakınsama ilişkilerini inceleyeceğiz. Daha sonra, kuvvetli lacunary $\mathtt{I}^*$-Cauchy dizisi kavramını vereceğiz ve kuvvetli lacunary $\mathtt{I}$-Cauchy dizisi ile kuvvetli lacunary $\mathtt{I}^*$-Cauchy dizisi arasındaki ilişkileri inceleyeceğiz.

Aşağıdakileri tanımlıyoruz :

Tanım 4. $\theta_3 = \theta_{r,s,t} = \{(j_r, k_s, l_t)\}$ bir lacunary üçlü dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{(r,s,t) \in \mathrm{N}^3 : \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{(j,k,l)\in I_{r,s,t}} \left| x_{jkl} - \ell \right| \ge \varepsilon \right\} \in \mathtt{I}_3$$

sağlanıyorsa bir $x = (x_{jkl})_{j,k,l\in \mathrm{N}}$ üçlü dizisi ℓ değerine kuvvetli lacunary $\mathtt{I}$-yakınsaktır denir. Bu durumda $x_{jkl} \to \ell(\mathtt{I}_{\theta_3})$ yazabiliriz.

Tanım 5. $\theta_3 = \theta_{r,s,t} = \{(j_r, k_s, l_t)\}$ bir lacunary üçlü dizi olsun. Bir $x = (x_{jkl})_{j,k,l\in \mathrm{N}}$ üçlü dizisinin ℓ ye lacunary $\mathtt{I}^*$-yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul

$$K' = \{(r,s,t) \in \mathrm{N}^3 : (j_m, k_m, l_m) \in I_{r,s,t}\} \in \mathtt{F}(\mathtt{I}_3)$$

(yani, $\mathrm{N}^3 \setminus K^2 \in \mathtt{I}_3$) için

$$\lim_{\substack{r,s,t\to\infty \\ (r,s,t)\in K'}} \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{(j_m,k_m,l_m)\in I_{r,s,t}} x_{j_m k_m l_m} = \ell$$

olacak şekilde N^3'nin

$$K = \{ j_1 < j_2 < ...; k_1 < k_2 < ...; l_1 < l_2 < ....\}$$

bir alt kümesinin mevcut olmasıdır.

Bu durumda $x_{jkl} \to \ell(\mathtt{I}^*_{\theta_3})$ yazabiliriz.

Tanım 6. $\theta_3 = \theta_{r,s,t} = \{(j_r, k_s, l_t)\}$ bir lacunary üçlü dizi olsun. Bir $x = (x_{jkl})_{j,k,l\in \mathrm{N}}$ üçlü dizisinin ℓ ye kuvvetli lacunary $\mathtt{I}^*$-yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşul

$$K' = \{(r,s,t) \in \mathrm{N}^3 : (j_m, k_m, l_m) \in I_{r,s,t}\} \in \mathtt{F}(\mathtt{I}_3)$$

(yani $\mathrm{N}^3 \setminus K' \in \mathtt{I}_3$) için

$$\lim_{\substack{r,s,t\to\infty \\ (r,s,t)\in K'}} \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{(j_m,k_m,l_m)\in I_{r,s,t}} \left| x_{j_m k_m l_m} - \ell \right| = 0$$

olacak şekilde N^3 nin bir

$$K = \{ j_1 < j_2 < ...; k_1 < k_2 < ...; l_1 < l_2 < ....\}$$

alt kümesinin mevcut olmasıdır.

Bu durumda, $x_{jkl} \to \ell\left[\mathtt{I}^*_{\theta_3}\right]$ yazabiliriz.

Teorem 1. $\mathtt{I}_3$ bir gerçek ideal olsun. Eğer $x_{jkl} \to \ell\left[\mathtt{I}^*_{\theta_3}\right]$ ise $x_{jkl} \to \ell(\mathtt{I}^*_{\theta_3})$ sağlanır.

İspat. $x = \{x_{jkl}\}$ dizisi ℓ ye kuvvetli lacunary $\mathtt{I}^*$-yakınsak olsun. O zaman tanımdan

$$K' = \{(r,s,t) \in \mathrm{N}^3 : (j_m, k_m, l_m) \in I_{r,s,t}\} \in \mathtt{F}(\mathtt{I}_3)$$

kümesi, $\varepsilon > 0$ ve her $r > r_0, s > r_0, t > r_0$ için

$$\frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{\substack{(j_m,k_m,l_m)\in I_{r,s,t} \\ (r,s,t)\in K'}} \left| x_{j_m k_m l_m} - \ell \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde r_0 pozitif tamsayısı vardır öyle ki $\mathbb{N}^3$ nin $K = \{j_1 < j_2 < ...; k_1 < k_2 < ...; l_1 < l_2 < ...\}$ kümesi mevcuttur. Böylece her $\varepsilon > 0$ ve $r > r_0, s > r_0, t > r_0$ için

$$\left| \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{\substack{(j_m,k_m,l_m)\in I_{r,s,t} \\ (r,s,t)\in K'}} x_{j_m k_m l_m} - \ell \right| \le \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{\substack{(j_m,k_m,l_m)\in I_{r,s,t} \\ (r,s,t)\in K'}} \left| x_{j_m k_m l_m} - \ell \right| < \varepsilon$$

elde edilir. Buradan teoremin ispatı tamamlanır.

Teorem 2. $\mathcal{I}_3$ bir gerçek ideal olsun. Eğer $x_{jkl} \to \ell\left[\mathcal{I}^*_{\theta_3}\right]$ ise $x_{jkl} \to \ell\left(\mathcal{I}_{\theta_3}\right)$ sağlanır.

İspat. $x = \{x_{jkl}\}$ dizisi ℓ kuvvetli lacunary $\mathcal{I}^*$-yakınsak olsun. O zaman tanımdan

$$K' = \{(r,s,t)\in \mathbb{N}^3 \; : \; (j_m,k_m,l_m)\in I_{r,s,t}\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_3)$$

kümesi, $\varepsilon > 0$ ve her $r > r_0, s > r_0, t > r_0$ için

$$\frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{\substack{(j_m,k_m,l_m)\in I_{r,s,t} \\ (r,s,t)\in K'}} \left| x_{j_m k_m l_m} - \ell \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde r_0 pozitif tamsayısı vardır öyle ki $\mathbb{N}^3$'nin $K = \{j_1 < j_2 < ...; k_1 < k_2 < ...; l_1 < l_2 < ...\}$ kümesi mevcuttur. Bu durumda $\mathcal{I}_3$ gerçek ideal ve $Z = \mathbb{N}^3 \setminus K'$ olur. Böylece $Z \in \mathcal{I}_3$ ve

$$\left\{ (r,s,t)\in \mathbb{N}^3 \; : \; \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{(j,k,l)\in I_{r,s,t}} \left| x_{jkl} - \ell \right| \ge \varepsilon \right\} \subset Z$$
$$\cup \{ j_1 < ... < j_{r_0}; k_1 < ... < k_{r_0}; l_1 < .... < l_{r_0} \}$$

olduğunu gözlemleriz. Buradan

$$\{ j_1 < ... < j_{r_0}; k_1 < ... < k_{r_0}; l_1 < .... < l_{r_0} \} \in \mathcal{I}_3$$

elde edilir. Bu ise

$$\left\{ (r,s,t)\in \mathbb{N}^3 \; : \; \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{(j,k,l)\in I_{r,s,t}} \left| x_{jkl} - \ell \right| \ge \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}_3$$

anlamına gelir. O halde $\{x_{jkl}\}$ dizisi ℓ değerine kuvvetli lacunary $\mathcal{I}$-yakınsaktır. Bu ise istenilen sonucu verir.

Aşağıdaki tanım, (AP3) özelliğine sahip gerçek idealler için bir $\mathcal{I}_3$-yakınsamasının bir $\mathcal{I}^*_3$-yakınsaması ile karşılaştığını kanıtlamak için gereklidir.

Tanım 7. ([11]) Eğer $\mathcal{I}_3$'ten çift olarak ayrık kümelerin her $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dizisi için her $j \in \mathbb{N}$ ve $\cup_{j\in\mathbb{N}} B_j \in \mathcal{I}_3$ için simetrik fark $A_j \Delta B_j$ sonlu bir küme olacak şekilde $B_j \subset \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$, kümeleri mevcut ise bir $\mathcal{I}_3 \subset 2^{\mathbb{N}^3}$ gerçek ideali (AP3) koşulunu sağlar denir.

[11]'deki Teorem 5'i kullanarak aşağıdaki sonucu ispatsız olarak verebiliriz.

Teorem 3. $\mathcal{I}_3$ ideali (AP3) koşulunu sağlasın. Eğer $x_{jkl} \to \ell\left(\mathcal{I}_{\theta_3}\right)$ ise $x_{jkl} \to \ell\left[\mathcal{I}^*_{\theta_3}\right]$ sağlanır.

Şimdi, lacunary $\mathcal{I}^*_3$-Cauchy üçlü dizisi ve kuvvetli lacunary $\mathcal{I}^*_3$-Cauchy üçlü dizisi terimlerini sunacağız.

Tanım 8. $\theta_3 = \theta_{r,s,t} = \{(j_r, k_s, l_t)\}$ bir lacunary üçlü dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $j, p \ge N_1$, $k, q \ge N_2$, $l, r \ge N_3$ için

$$\left\{ (r,s,t)\in \mathbb{N}^3 \; : \; \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{(j,k,l)\in I_{r,s,t}} \left| x_{jkl} - x_{pqr} \right| \ge \varepsilon \right\} \in \mathcal{I}_3$$

olacak şekilde N_1, N_2 ve N_3 mevcut ise bir $x = (x_{jkl})_{j,k,l\in\mathbb{N}}$ üçlü dizisine kuvvetli lacunary $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi denir.

Tanım 9. $\theta_3 = \theta_{r,s,t} = \{(j_r, k_s, l_t)\}$ bir lacunary üçlü dizi olsun. Eğer bir $x = (x_{jkl})_{j,k,l\in\mathbb{N}}$ üçlü dizisine lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi olarak tanımlanması için gerekli ve yeterli koşul

$$K' = \{(r,s,t)\in \mathbb{N}^3 \; : \; (j_m,k_m,l_m)\in I_{r,s,t}\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_3)$$

(yani, $\mathbb{N}^3 \setminus K' \in \mathcal{I}_3$) kümesi için

$$\lim_{\substack{r,s,t\to\infty \\ (r,s,t)\in K'}} \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{\substack{(j_m,k_m,l_m), \\ (p_n,q_n,r_n)\in I_{r,s,t}}} \left(x_{j_m k_m l_m} - x_{p_n q_n r_n} \right) = 0$$

olacak şekilde $\mathbb{N}^3$ nin bir

$$K = \{j_1 < j_2 < ...; k_1 < k_2 < ...; l_1 < l_2 < ....\}$$

alt kümesinin mevcut olmasıdır.

Tanım 10. $\theta_3 = \theta_{r,s,t} = \{(j_r, k_s, l_t)\}$ bir lacunary üçlü dizi olsun. Bir $x = (x_{jkl})_{j,k,l \in \mathbb{N}}$ üçlü dizisinin kuvvetli lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi olması için gerekli ve yeterli koşul
$K' = \{(r,s,t) \in \mathbb{N}^3 : (j_m, k_m, l_m) \in I_{r,s,t}\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_3)$
(yani $\mathbb{N}^3 \setminus K' \in \mathcal{I}_3$) kümesi için

$$\lim_{\substack{r,s,t\to\infty \\ (r,s,t)\in K'}} \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{\substack{(j_m,k_m,l_m), \\ (p_n,q_n,r_n)\in I_{r,s,t}}} \left| x_{j_m k_m l_m} - x_{p_n q_n r_n} \right| = 0$$

olacak şekilde $\mathbb{N}^3$'nin bir

$$K = \{ j_1 < j_2 < ...; k_1 < k_2 < ...; l_1 < l_2 < ....\}$$

alt kümesinin mevcut olmasıdır.

Teorem 4. Eğer $\{x_{jkl}\}$ üçlü dizisi kuvvetli lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizi ise o zaman $\{x_{jkl}\}$ üçlü dizisi lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisidir.

İspat. $x = \{x_{jkl}\}$ bir kuvvetli lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy üçlü dizisi olsun. O zaman tanımdan
$K' = \{(r,s,t) \in \mathbb{N}^3 : (j_m, k_m, l_m) \in I_{r,s,t}\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_3)$
kümesi, her $\varepsilon > 0$ ve her $r > r_0, s > r_0, t > r_0$ için

$$\frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{\substack{(j_m,k_m,l_m),(p_n,q_n,r_n)\in I_{r,s,t} \\ (r,s,t)\in K'}} \left| x_{j_m k_m l_m} - x_{p_n q_n r_n} \right| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir n_0 pozitif tamsayısı ve $\mathbb{N}^3$'nin

$$K = \{ j_1 < j_2 < ...; k_1 < k_2 < ...; l_1 < l_2 < ...\}$$

alt kümesi vardır. Buradan her $\varepsilon > 0$ ve her $r > r_0, s > r_0, t > r_0$ için

$$\left| \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{\substack{(j_m,k_m,l_m),(p_n,q_n,r_n)\in I_{r,s,t} \\ (r,s,t)\in K'}} \left(x_{j_m k_m l_m} - x_{p_n q_n r_n} \right) \right|$$

$$\leq \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{\substack{(j_m,k_m,l_m),(p_n,q_n,r_n)\in I_{r,s,t} \\ (r,s,t)\in K'}} \left| x_{j_m k_m l_m} - x_{p_n q_n r_n} \right| < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

Sonraki teoremler sırasıyla Teorem 1 ve 2'nin analogları olduğundan, aynı yöntemlerle kanıtlanabilir.

Teorem 5. Eğer $\{x_{jkl}\}$ üçlü dizisi kuvvetli lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisi ise o zaman $\{x_{jkl}\}$ üçlü dizisi kuvvetli lacunary $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir.

Teorem 6. $\mathcal{I}_3$ ideali (AP3) koşulunu sağlasın. Eğer bir $\{x_{jkl}\}$ üçlü dizisi kuvvetli lacunary $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi ise o zaman o dizi kuvvetli lacunary $\mathcal{I}^*$-Cauchy dizisidir.

Şimdi aşağıdaki son teoremi sunuyoruz.

Teorem 7. Eğer bir $\{x_{jkl}\}$ üçlü dizisi ℓ değerine kuvvetli lacunary $\mathcal{I}^*$-yakınsak ise o zaman $\{x_{jkl}\}$ üçlü dizisi kuvvetli lacunary $\mathcal{I}$-Cauchy dizisidir.

İspat. $x = \{x_{jkl}\}$ üçlü dizisi bir ℓ değerine kuvvetli lacunary $\mathcal{I}^*$-yakınsak olsun. O zaman tanımdan
$K' = \{(r,s,t) \in \mathbb{N}^3 : (j_m, k_m, l_m) \in I_{r,s,t}\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_3)$
kümesi, için

$$\frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{\substack{(j_m,k_m,l_m)\in I_{r,s,t} \\ (r,s,t)\in K'}} \left| x_{j_m k_m l_m} - \ell \right| = 0$$

olacak şekilde $\mathbb{N}^3$ nin

$$K = \{ j_1 < j_2 < ...; k_1 < k_2 < ...; l_1 < l_2 < ...\}$$

kümesi vardır. Bu sebeple her $\varepsilon > 0$ ve her $r > r_0, s > r_0, t > r_0$ için

$$\frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{\substack{(j_m,k_m,l_m),(p_n,q_n,r_n)\in I_{r,s,t} \\ (r,s,t)\in K'}} \left| x_{j_m k_m l_m} - x_{p_n q_n r_n} \right|$$

$$\leq \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{\substack{(j_m,k_m,l_m)\in I_{r,s,t} \\ (r,s,t)\in K'}} \left| x_{j_m k_m l_m} - \ell \right|$$

$$+ \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{\substack{(p_n,q_n,r_n)\in I_{r,s,t} \\ (r,s,t)\in K'}} \left| x_{p_n q_n r_n} - \ell \right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{\substack{r,s,t\to\infty \\ (r,s,t)\in K'}} \frac{1}{h_{r,s,t}} \sum_{\substack{(j_m,k_m,l_m), \\ (p_n,q_n,r_n)\in I_{r,s,t}}} \left| x_{j_m k_m l_m} - x_{p_n q_n r_n} \right| = 0$$

olur. Teorem 5, $\{x_{jkl}\}$ üçlü dizisinin bir kuvvetli lacunary $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi olduğunu verir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar

IV. SONUÇLAR

Bu çalışma toplanabilirlik teorisi alanına üç katkı sağlamaktadır: (i) üçlü diziler için bir tür lacunary $\mathcal{I}^*$-yakınsaması; (ii) üçlü diziler için kuvvetli lacunary $\mathcal{I}^*$-yakınsaması kavramı; ve (iii) kuvvetli lacunary I^*-Cauchy üçlü dizisi kavramı. Bu sonuçlar üçlü dizilerin yakınsaklık problemlerini incelemek için kullanılabilir. Bu kavramlar gelecekte üçlü dizi üzerindeki Orlicz fonksiyonu için de çalışılabilir.

KAYNAKLAR

[1] N. Akın, E. Dündar, "Strongly lacunary I^*-convergence and lacunary I^*-Cauchy sequence", *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, in press, 2023.
[2] B. Altay, F. Başar, "Some new spaces of double sequences", *J. Math. Anal. Appl.*, 309(1) (2005), 70-90.
[3] F. Başar, "Summability Theory and its Applications", Bentham Science Publishers, İstanbul, 2012.
[4] E. Dündar, U. Ulusu, N. Pancaroğlu, "Strongly I_2-lacunary convergence and I_2-lacunary Cauchy double sequences of sets", *Aligarh Bull. Math.*, 35(1-2) (2016), 1-5.
[5] A. Esi, E. Savaş, "On lacunary statistically convergent triple sequences in probabilistic normed space", *Appl. Math. Inf. Sci.*, 9(5) (2015), 2529-2534.
[6] H. Fast, "Sur la convergence statistique", *Colloq. Math.*, 2 (1951), 241-244.
[7] J.A. Fridy, "On statistical convergence", *Analysis (Munich)*, 5 (1985), 301-313.
[8] J.A. Fridy, C. Orhan, "Lacunary statistical convergence", *Pacific J. Math.*, 160 (1993), 43-51.
[9] M. Gürdal, M. B. Huban, "On I-convergence of double sequences in the topology induced by random 2-norms", *Mat. Vesnik*, 66(1) (2014), 73-83.
[10] M. Gürdal, A. Şahiner, "Extremal I-limit points of double sequences", *Appl. Math. E-Notes*, 8 (2008), 131-137.
[11] M. Gürdal, E. Savaş, "An investigation on the triple ideal convergent sequences in fuzzy metric spaces", *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Sér. A1 Math. Stat.*, 71(1) (2022), 13-24.
[12] M.B. Huban, M. Gürdal, "Wijsman lacunary invariant statistical convergence for triple sequences via Orlicz function", *J. Class. Anal.*, 17(2) (2021), 119-128.
[13] M.B. Huban, M Gürdal, H. Baytürk, "On asymptotically lacunary statistical equivalent triple sequences via ideals and Orlicz function", *Honam Math. J.*, 43 (2), 343-357.
[14] P. Kostyrko, T. Salat, W. Wilczynski, "I-convergence", *Real Anal. Exchange*, 26 (2000), 669-685.
[15] M. Mursaleen, F. Başar, "Sequence Spaces: Topics in Modern Summability Theory", CRC Press, Taylor & Francis Group, Series: Mathematics and Its Applications, Boca Raton . London . New York, 2020.
[16] M. Mursaleen, O.H.H. Edely, "Statistical convergence of double sequences", *J. Math. Anal. Appl.*, 288 (2003) 223-231.
[17] A. Nabiev, S. Pehlivan, M. Gürdal, "On I-Cauchy sequences", *Taiwanese J. Math.*, 11(2) (2007), 569-576.
[18] A. Nabiev, E. Savaş, M. Gürdal, "Statistically localized sequences in metric spaces", *J. Appl. Anal. Comput.*, 9(2) (2019), 739--746.
[19] A. Şahiner, M. Gürdal, F.K. Düden, "Triple sequences and their statistical convergence", *Selçuk J. Appl. Math.*, 8(2) (2007), 49-55.
[20] A. Şahiner, M. Gürdal, T. Yiğit, "Ideal convergence characterization of the completion of linear n-normed spaces", *Comput. Math. Appl.*, 61(3) (2011), 683-689.
[21] A. Şahiner, B.C. Tripathy, "Some I-related properties of triple sequences", *Selçuk J. Appl. Math.*, 9(2) (2008), 9-18.
[22] T. Šalát, "On statistically convergent sequences of real numbers", *Math. Slovaca*, 30(2) (1980), 139-150.
[23] E. Savaş, M. Gürdal, "I-statistical convergence in probabilistic normed spaces", *Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys.*, 77(4) (2015), 195-204.
[24] E. Savaş, U. Yamancı, M. Gürdal, "I-lacunary statistical convergence of weighted g via modulus functions in 2-normed spaces", *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Sér. A1 Math. Stat.*, 68(2) (2019), 2324-2332.
[25] U. Yamancı, M. Gürdal, "On lacunary ideal convergence in random n-normed space", *J. Math.*, 2013, Article ID 868457, 8 pages, (2013).