Uluslararası İleri Doğa Bilimleri ve Mühendislik Araştırmaları Dergisi
Sayı 8, S. 257-265, 9, 2024

Araştırma Makalesi

International Journal of Advanced Natural Sciences and Engineering Researches
Volume 8, pp. 257-265, 9, 2024

Research Article

IJANSER

https://as-proceeding.com/index.php/ijanser
ISSN:2980-0811

Sınır noktalarının birinde tekilliğe sahip olan iki-aralıklı özdeğer probleminin bazı spektral özellikleri

Kadriye Aydemir[1*] ve Oktay Sh. Mukhtarov [2,3]

[1*]*Department of Mathematics/Faculty of Arts and Science, Amasya University, Turkey*
[2]*Department of Mathematics/Faculty of Arts and Science, Tokat Gaziosmanpaşa University, Turkey*
[3]Institute of Mathematics and Mechanics, Baku, Azerbaijan,

[*] *(kadriyeaydemr@gmail.com.tr) Email of the corresponding author*

(Received: 09 October 2024, Accepted: 18 October 2024)

(5th International Conference on Innovative Academic Studies ICIAS 2024, 10-11 October 2024)

ATIF/REFERENCE: Aydemir, K. & Mukhtarov, O. S. (2024). Sınır noktalarının birinde tekilliğe sahip olan iki-aralıklı özdeğer probleminin bazı spektral özellikleri, *International Journal of Advanced Natural Sciences and Engineering Researches*, 8(9), 257-265.

Özet – Bu çalışmada, etkileşim noktası adı verilen sol ve sağ aralıkların ortak ucuna uygulanan sınır iletim koşulları olan tekil iki-aralıklı Sturm-Liouville problemleri araştırılmıştır. Tüm özdeğerlerinin basitliğini yani geometrik katının bire eşit olduğunu ve farklı özdeğerlere ait özfonksiyonların ortogonalliğini garanti eden yeterli koşullar bulunmuştur. Özel durum β=1 durumunda ele alınan problem ve elde edilen sonuçlar benzer klasik olan problemlere indirgenmektedir. Dolayısıyla elde edilen sonuçlar karşılık gelen klasik sonuçları genelleştirmektedir.

Anahtar Kelimeler – Sınır Değer Problemi, Özdeğer, Özfonksiyon, Etkileşim Noktası.

I. GİRİŞ

Sturm-Liouville problemleri mühendislikte, fizikte ve son zamanlarda hatta biyoloji ve sosyal bilimlerde bile ortaya çıkmaktadır. Bu problemler adi ve kısmi diferansiyel denklemler için özdeğer problemlerine yol açar. Bilim ve mühendislik uygulamalarında değişkenlere ayrılma yöntemi kullanıldıktan sonra Sturm-Liouville sınır değer problemleri ortaya çıkmaktadır. Örneğin, piyano veya keman teli gibi iki direk arasına gerilmiş, gergin ve homojen bir teli düşünün. Telleri, küçük enine titreşimler yaşayacak şekilde çekildiğini varsayalım. Eğer $u = u(x,t)$ telin x noktasının t anında başlangıç konumundan sapması ise, o zaman $u(x,t)$

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < l, \; t > 0, \tag{1}$$

dalga denklemini

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \le x \le l,$$
$$u_t(x,0) = g(x), \quad 0 \le x \le l,$$

başlangıç koşullarını ve

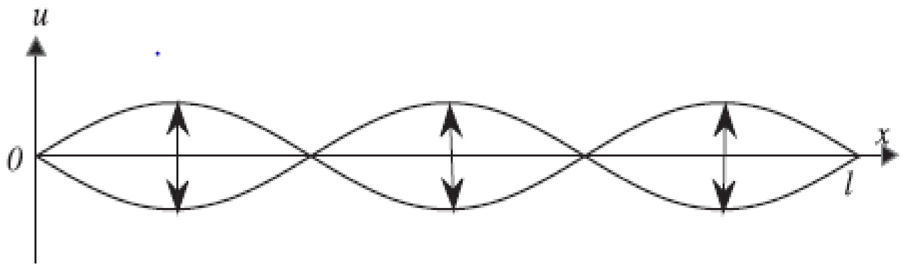
$$u(0,t) = 0, \quad t \ge 0, \tag{2}$$

$$u(l,t) = 0,\ t \geq 0, \qquad (3)$$

sınır koşullarını sağlar. Burada l telin uzunluğunu, $c = \sqrt{\tau/\rho}$ dalga yayılma hızını, τ teldeki gerginliğin yatay bileşenini ve ρ ipin doğrusal yoğunluğunu göstermektedir. f ve g fonksiyonları sırası ile telin başlangıç andaki yer değiştirmesini ve başlangıç hızını belirtir. Eğer dış kuvvetler homojen tele etki ederse dalga denklemi

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + F(x, t)$$

olur, burada F(x, t) telin Şekil 1'deki gibi eğilmesiyle ortaya çıkan dış enine kuvvetleri modeller.



Şekil 1.3: Bir Telin Titreşimleri

Eğer tel homojen değilse, o zaman ρ = ρ(x) > 0 olur ve dalga denklemi daha genel olan

$$\rho(x)\, u_{tt} = (\tau(t)\, u_x)_x$$

biçiminde ifade edilir. ρ_0, τ_0 sabitler ve $c = \sqrt{\tau_0 / \rho_0}$ olmak üzere tel ρ(x) = ρ_0 ve τ = τ_0 olacak şekilde homojen olsun. Eğer −λ ayırma sabiti olmak üzere X(x) ve T(t) fonksiyonları sırası ile

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \qquad (4)$$

$$X(0) = 0,\ X(l) = 0, \qquad (5)$$

Sturm-Liouville problemini ve

$$T''(t) + \lambda c^2 2T(t) = 0,$$

Sturm-Liouville denklemini sağlarsa bu taktirde

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

fonksiyonu da (1) dalga denklemini ve (2), (3) sınır koşullarını sağlar. $X(x)$ fonksiyonu için elde edilen (4)-(5) Sturm-Liouville problemi her zaman $X(x) = 0$ çözümüne sahiptir. Bu nedenle, ayrılmış çözümler sadece (4) probleminin sıfır olmayan çözümleri olacak şekilde λ değerleri varsa yararlı olacaktır. Bilindiği gibi, değişkenlere ayrılma yöntemi X için bir özdeğer problemine yol açmıştır. Bu, Euler burkulmasında karşılaşılan özdeğer probleminin aynısıdır. Eğer tel homojen değilse ve gerilimin yatay bileşeni zamana bağlıysa, sınır değer problemi

$$X''(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0,$$

$$X(0) = 0, \qquad X(l) = 0$$

şeklini alır ve ayrılmış bir çözümün zamansal faktörü ise

$$T''(t) + \lambda\tau(t)T = 0.$$

Sturm-Liouville denklemini sağlar. Adi diferansiyel denklemler için özdeğer problemleri (bu tür problemler genel olarak Sturm-Liouville problemleri olarak adlandırılmaktadır) literatürde ilk defa 1908 yılında Birkoffun [1], [2] çalışmalarında araştırılmaya başlanmıştır. Bu çalışmalardan sonra özdeğer (spektral) problemler, gittikçe artan bir ilgi ile araştırılmış ve çok büyük gelismeler sağlamaştır. Özellikle 19. yüzyılın ortalarında Sturm ve Liouvillenin yaptığı çalışmalar bu konuya yeni bir ivme kazandırmıştır. Bu konuda günümüze kadar binlerce makale ve kitap yazılmıştır (örneğin, [3-5] kaynaklarına ve bu kaynaklara yapılmış atıflara bakın). Matematiksel fiziğin bazı önemli problemlerinin sadece bölgenin sınırında belirtilen, sınır koşulları olarak adlandırılan koşulları değil, aynı zamanda verilen iç yüzeyde belirtilen, iletim koşulları olarak adlandırılan koşulları da içermektedir. Son zamanlarda, ek iletim koşullarını içeren sınır değer problemlerine olan ilgi giderek artmaktadır (örneğin, [6-14] bakınız).

II. ESAS SONUÇLAR

Bu çalışmada aşağıdaki iki aralıklı, singular (tekil) Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının bazı temel ötellikleri incelenecektir. Ortak uç noktası olan ayrık $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarında tanımlı olan

$$\Im u := -(p(x)u')' + q(x)u = \lambda u(x) \qquad (6)$$

diferensiyel denkleminden

$$u(0) = u(-0) \qquad (7)$$

$$u'(0) = \beta u'(-0) \qquad (8)$$

iletim şartlarından (bu şartlar literatürde geçiş şartları, sıçrama şartları veya impulsive şartları olarak da adlandırılmaktadır) oluşan probleme iki aralıklı diferensiyel denklemi de denir (2ADD) . Burada $p(x)$ *ve* $q(x)$ reel değerli fonksiyonlar β reel sayıdır, $\boldsymbol{\lambda}$ ise reel parametredir. Çalışma boyunca $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının aşağıdaki şartları sağladığı kabul edilecektir.

1) $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonları $[-1,0)$ ve $(0,1]$ arlaıklarının her birinde süreklidirler.
2) $\forall x \in (-1,0) \cup (0,1)$, $p(x) > 0$,
3) $p(x)$ fonksiyonu $(-1,0)$ ve $(0,1)$ aralıklarının her birinde sürekli diferansiyellenebilirdir.
4) i) Sonlu $p(\pm 0)$ limit değerleri mevcuttur.
   ii) Sonlu $q(\pm 0)$ limit değerleri mevcuttur.
5) $p(-0) > 0$, $p(+0) > 0, p(-1) + p(1) > 0$
6) $\beta \neq 0$

Tanım 1. (6)-(8) 2ADD verilsin.

1) $p(1) > 0$ olduğu durumda $|\gamma_1| + |\delta_1| \neq 0$ olmak üzere

$$\gamma_1 u(-1) + \delta_1 u'(-1) = 0 \qquad (9)$$

sınır şartından

2) $p(-1) > 0$ olduğu durumda $|\gamma_2| + |\delta_2| \neq 0$ olmak üzere

$$\gamma_2 u(1) + \delta_2 u'(1) = 0 \qquad (10)$$

sınır şartından

3) $p(-1) > 0$ ve $p(1) > 0$ olduğu durumda ise $|\gamma_i| + |\delta_i| \neq 0$ (i=1,2) olmak üzere

$$\gamma_1 u(-1) + \delta_1 u'(-1) = 0 \qquad (11)$$

$$\gamma_2 u(1) + \delta_2 u'(1) = 0 \qquad (12)$$

sınır şartlarından oluşan problemi iki aralıklı singular Sturm-Liouville sınır değer geçiş problemi (2ASSLSDGP) olarak adlandırılacaktır.

Tanım 2. Eger her hangi bir $\boldsymbol{\lambda}=\lambda_0$ için 2ASSLSDGP-nin özdeş olarak sıfırdan farklı $u_0(x,\lambda_0)\not\equiv 0$ çözümü varsa, λ_0 −a bu problemin özdeğeri $u_0(x,\lambda)$ fonksiyonuna ise bu özdeğere uygun özfonksiyon denir, $(\lambda_0, u_0(x))$ çiftine ise özçift denir.

Teorem 3. $u_1(x)=u(x,\lambda_1)$ ve $u_2(x)=u(x,\lambda_2)$ fonksiyonları 2ASSLSDGP nin iki özfonksiyonu olsun. O halde

1) eğer $p(-1)>0$ ise öyle C$\neq 0$ sayısı mevcuttur ki

$$u_2(-1)=Cu_1(-1),\ u_2'(-1)=Cu_1'(-1) \tag{13}$$

eşitlikleri sağlanır.

2) eğer $p(1)>0$ ise öyle D$\neq 0$ sayısı mevcuttur ki

$$u_2(1)=Du_1(1),\ u_2'(1)=Du_1'(1) \tag{14}$$

eşitlikleri sağlanır.

3) eğer $p(-1)\,p(1)>0$ ise o halde öyle E$\neq 0$ sayısı mevcuttur ki

$$u_2(-1)=\mathrm{E}u_1(-1),\ u_2'(-1)=Eu_1'(-1) \tag{15}$$

ve

$$u_2(1)=\mathrm{E}u_1(1),\ u_2'(1)=Eu_1'(1) \tag{16}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. İlk önce $p(-1)>0$ durumu için ispatı yapalım. Bu durumda tanım 1 gereği

$$\gamma_1 u_1(-1)+\delta_1 u_1'(-1)=0$$

ve

$$\gamma_1 u_2(-1)+\delta_1 u_2'(-1)=0$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitlikler γ_1,δ_1 değişkenlerine göre homojen lineer denklemler sistemi olduğu için ve $|\gamma_1|+|\delta_1|\neq 0$ olduğu için sistemin determinantı sıfıra eşittir; yani

$$\begin{vmatrix} u_1(-1) & u_1'(-1) \\ u_2(-1) & u_2'(-1)\end{vmatrix}=0$$

eşitliği sağlanır. O halde bu determinantın satır vektörleri lineer bağımlı olacağından

$$\begin{pmatrix} u_2(-1) \\ u_2'(-1)\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix} u_1(-1) \\ u_1'(-1)\end{pmatrix}$$

olacak biçimde $C\neq 0$ mevcuttur.

Şimdi $p(1)>0$ durumu için ispat yapalım. Tanım 1 gereği

$$\gamma_2 u_1(1)+\delta_2 u_1'(1)=0$$

ve

$$\gamma_2 \mathrm{u}_2(1)+\delta_2 \mathrm{u}_2'(1)=0$$

eşitlikleri sağlanır. $(\gamma_2,\delta_2)\neq(0,0)$ olduğu için

$$\begin{vmatrix} u_1(1) & u_1'(1) \\ u_2(1) & u_2'(1)\end{vmatrix}=0$$

olur. Bu durumda determinantın satır vektörleri lineer bağımlı olacağından

$$u_2(1) = Du_1(1),\ u_2'(1) = Du_1'(1)$$

olacak biçimde D$\neq 0$ mevcuttur. Böylece $p(1) > 0$ durumu için de ispat tamamlanmış oldu.
$p(-1)\,p(1) > 0$ olduğu durumda hem $p(-1) > 0$ hem de $p(1) > 0$ olacağından öyle C$\neq 0$ ve D$\neq 0$ sayıları mevcuttur ki

$$u_2(-1) = Cu_1(-1),\ u_2'(-1) = Cu_1'(-1) \tag{17}$$

ve

$$u_2(1) = Du_1(1),\ u_2'(1) = Du_1'(1) \tag{18}$$

eşitlikleri sağlanır. (17) eşitliğinden

$$W(u_1, u_2; -1) = 0 \tag{19}$$

eşitliği elde edilir. O halde adi diferensiyel denklemler teorisinden iyi bilinen teorem gereği [3] $\forall x \in [-1,0)$

$$W(u_1, u_2; x) = 0 \tag{20}$$

elde edilir. Bu nedenle u_1 ve u_2 fonksiyonları $[-1,0)$ sol aralığında lineer bağımlıdır. Ayrıca $u_2(-1) = Cu_1(-1)$ olduğu için $\forall x \in [-1,0)$

$$u_2(x) = Cu_1(x) \tag{21}$$

eşitliğini elde ederiz. Benzer şekilde $W(u_1, u_2; -1) = 0$ eşitliği gereği $\forall x \in (0,1]$ için

$$u_2(x) = Du_1(x) \tag{22}$$

eşitliği sağlanır. Hem $u_1(x)$ hem de $u_2(x)$ özfonksiyon oldukları için her ikisi de geçiş şartlarını sağlar. Dolayısıyla

$$u_1(+0) = u_1(-0),\ u_1'(+0) = \beta u_1'(-0) \tag{23}$$

ve

$$u_2(+0) = u_2(-0),\ u_2'(+0) = \beta u_2'(-0) \tag{24}$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca (21) ve (22) eşitlikleri gereği sırası ile

$$u_2(-0) = Cu_1(-0),\ u_2(+0) = Du_1(+0) \tag{25}$$

eşitlikleri sağlanır. $u_2(x)$ özfonksiyon olduğu için (7) geçiş şartını, yani $u_2(+0) = u_2(-0)$ eşitliğini sağlar. Bu eşitlikten ve (24) eşitliğinden $u_2(+0) = Cu_1(-0)$ eşitliği elde edilir. $u_1(x)$ fonksiyonu da özfonksiyon olduğu için $u_1(-0) = u_1(+0)$ eşitliği sağlanır. Son iki eşitlikten ise $u_2(+0) = Cu_1(+0)$ eşitliği elde edilir. (25) eşitliği gereği ise $u_1(+0) = \frac{1}{D} u_2(+0)$ eşitliği sağlanır. Son iki eşitlikten

$$u_2(+0) = \frac{C}{D} u_2(+0) \tag{26}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $u_2(x)$ fonksiyonu (8) geçiş şartını sağladığı için $u_2'(+0) = \beta u_2'(-0)$ eşitliği sağlanır. (21) eşitliği gereği ise $u_2'(-0) = Cu_1'(-0)$ eşitliği sağlanır. Son iki eşitlikten $u_2'(+0) = \beta Cu_1'(-0)$ eşitliği elde edilir. $u_1(x)$ özfonksiyonu (8) geçiş şartını sağladığı için $\beta u_1'(-0) = u_1'(+0)$ eşitliği sağlanır. Son iki eşitlikten $u_2'(+0) = Cu_1'(+0)$ eşitliği elde edilir. (22) eşitliği gereği ise $u_1'(+0) = \frac{1}{D} u_2'(+0)$ eşitliği sağlanır. Buradan

$$u_2'(+0) = \frac{C}{D} u_1(+0) \tag{27}$$

eşitliği elde edilir. $u_2(x)$ özfonksiyon olduğu için $u_2(+0)$ ve $u_2'(+0)$ sayılarının her ikisi sıfır olamaz. Bu nedenle (26) ve (27) eşitliklerinden $\frac{C}{D} = 1$ yani elde edilir. C ve D nin ortak değerini E ile gösterirsek ispat biter.

Tanım 4. $u, v \in L_2(-1,0) \oplus L_2\ (0,1)$ fonksiyonları

$$\int_{-1}^{-0} u(x)\ v(x) dx + \int_{+0}^{1} u(x)\ v(x) dx = 0 \qquad (28)$$

eşitliği sağlanırsa $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları $L_2(-1,0) \oplus L_2\ (0,1)$ Hilbert uzayında ortogoneldir denir.

Teorem 5. Kabul edelim ki $p(-1)\, p(1) > 0$ ve $p(+0) = \frac{1}{\beta}\, p(-0)$ şartları sağlansın. O halde 2ASSLSDGP nin iki farklı ,λ_1 ve λ_2 özdeğerine uygun olan $u_1(x)$=$u(x, \lambda_1)$ ve $u_2(x)$=$u(x, \lambda_2)$ özfonksiyonları $L_2(-1,0) \oplus L_2\ (0,1)$ Hilbert uzayında ortogoneldir

İspat. $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ özfonksiyonlarının sırası ile sağladığı

$$-(\mathrm{p(x)} u_1')' + \mathrm{q(x)} u_1 = \lambda_1 u_1(\mathrm{x}), \quad x \epsilon [-1,0) \cup (0,1] \qquad (29)$$

$$-(\mathrm{p(x)} u_2')' + \mathrm{q(x)} u_2 = \lambda_2 u_2(\mathrm{x}), \quad x \epsilon [-1,0) \cup (0,1] \qquad (30)$$

eşitlikleri sırası ile u_2 ve u_1 ile çarptıktan sonra taraf tarafa çıkarırsak

$$u_2(\mathrm{p(x)} u_1')' - u_1(\mathrm{p(x)} u_2')' = (\lambda_1 - \lambda_2) u_1 u_2, \quad x \in [-1,0) \cup (0,1]$$

özdeşliği elde edilir. Bu özdeşliği $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarının herbirinde integralleyerek taraf tarafa toplarsak ve

$$u_2(\mathrm{p(x)} u_1')' - u_1(\mathrm{p(x)} u_2')' = \frac{d}{dx}(p(x) W(u_1, u_2; x))$$

Lagrange özdeşliğinden yararlanılırsak

$$(\lambda_1\text{-}\lambda_2)\left(\int_{-1}^{-0} u_1 u_2 \mathrm{dx} + \int_{+0}^{1} u_1 u_2 \mathrm{dx})\right)$$

$$= -\mathrm{J}[p\ W(u_1, u_2)] \mid_{x=0} + p(1) \mathrm{W}(u_1, u_2; 1) - p(-1) W(u_1, u_2; -1) \qquad (31)$$

eşitliği elde edilir. Burada $W(u_1, u_2; x)$ ile $u_1$ve u_2 fonksiyonlarının $u_1 u_2' - u_2 u_1'$ Wronskiyeni gösterilmiştir

$$J[f] \mid_{x=a} = f(+0) - f(a-0)$$

ise sıçrama operatörüdür. Teorem 3 gereği

$$p(1) \mathrm{W}(u_1, u_2; 1) = p(-1) W(u_1, u_2; -1) = 0 \qquad (32)$$

eşitlikleri sağlanır. Diğer taraftan (6)-(7) geçiş şartlarından yararlanılırsa

$$\begin{aligned} \mathrm{J}[\mathrm{p(x)\ W(u_1, u_2; x)}] \mid_{x=0} &= \mathrm{p(+0)}\big(\mathrm{u_1(+0) u_2'(+0) - u_2(+0) u_1'(+0)}\big) \\ &\quad + \mathrm{p(-0)}\big(\mathrm{u_1(-0) u_2'(-0) - u_2(-0) u_1'(-0)}\big) \\ &= \big(\beta\ \mathrm{p(+0) - p(-0)}\big)\ \mathrm{W(u_1, u_2; -0)} \\ &= 0 \end{aligned} \qquad (33)$$

elde edilir. (15) ve (16) eşitliklerini (14) eşitliğinde dikkate alırsak

$$(\lambda_1\text{-}\lambda_2)\Big(\int_{-1}^{-0} u_1u_2\mathrm{dx}+\int_{+0}^{1} u_1u_2\mathrm{dx})\Big)=0$$

elde edilir. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğu için sonuncu eşitlikte parantez içindeki ifade sıfıra eşit olur. İspat etti.

Tanım 6. 2ASSLSDGP nin verilmiş bir özdeğerine karşılık gelen maksimal sayıdaki lineer bağımsız özfonksiyonların sayısına bu özdeğerin geometrik katı denir. Geometrik katı 1 olan özdeğere basit özdeğer denir.

Açıklama 7. Bilindiği gibi regular SLP-lerinin her bir özdeğeri basittir. Regular Sturm-Liouville denklemi ve periyodik sınır şartlarından oluşan sınır değer probleminin geometrik katı 2 olan özdeğeri de mevcut olabilir. Genel olarak regular Sturm-Liouville denklemi ikinci mertebeden olduğu için lineer bağımsız çözüm sayısı da ikidir.

Bu nedenle regular Sturm-Liouville denklemleri ile verilen SLP-lerinin özdeğerlerinin geometrik katı en fazla iki olabilir. Fakat eğer Sturm-Liouville denklemi iki ayrık aralıkta verilmişse genel çözüm dört tane keyfi parametreye bağlı olduğu için *a priori* olarak özdeğerin geometrik katı dört de olabilir. Bu nedenle 2ASSLSDGP-nin özdeğerlerinin katının incelenmesi önemli bir konudur.

Tanım 8. (1) nolu diferansiyel denklemi $[-1,0)$ aralığında sağlayan her fonksiyon bu denklemin sol çözümü, (0,1] aralığında sağlayan her bir fonksiyona ise bu denklemin sağ çözümü diyeceğiz ve genel olarak bu çözümleri sırası ile $u_\ell(x)$ ve $u_r(x)$ biçiminde göstereceğiz.

Lemma 9. Eğer $p(-1) > 0$ ise o halde (6) nolu denklemin (9) nolu sınır şartlarını sağlayan sol çözümleri lineer bağımlıdırlar.

İspat. $u_\ell(x)$ ve $v_\ell(x)$ fonksiyonları (6) nolu denklemin (9) nolu sınır şartlarını sağlayan çözümü olsun. O halde Teorem 3 gereği

$$u_\ell(-1) = Cv_\ell(-1), u_\ell{}'(-1) = Cv_\ell{}'(-1) \qquad (34)$$

eşitliklerini sağlayan C$\neq 0$ sabiti mevcuttur. Burada $W(u_\ell, v_\ell; -1) = 0$ elde edilir. Buradan ∀x ∈ [-1,0) için $W(u_\ell, v_\ell; x) = 0$ elde edilir. O halde adi diferansiyel denklemler teorisinden iyi bilinen teorem (örneğin, [3], 'ye bakınız) gereği u_ℓ ve v_ℓ sol çözümleri lineer bağımlıdır. İspat bitti.

Lemma 10. Eğer $p(1) > 0$ ise o halde (6) nolu denklemin (10) nolu sınır şartını sağlayan sağ çözümleri lineer bağımlıdır.

İspat. Bu Lemmann ispatı bir önceki Lemmanın ispatına tamamen benzerdir.

Şimdi bu Lemmalardan da yararlanarak asağıdaki önemli özelliği elde edebiliriz.

Teorem 11. Kabul edelim ki $p(x)$ fonksiyonu için $p(-1) + p(1) > 0$ şartı sağlanır. O halde 2ASSLSDGP nin tüm özdeğerleri basittir.

İspat. Teoremi ilk önce $p(-1) > 0$ durumu için ispat edeceğiz. Kabul edelim ki $u_0(x)$ ve $v_0(x)$ fonksiyonları aynı bir λ=λ_0 özdeğerine uygun olan iki tane özfonksiyondur.

Bu özfonksiyonları

$$u_0(x) = \begin{cases} y_\ell(x), & x \in [-1,0) \\ y_r(x), & x \in (0,1] \end{cases}, \qquad v_0(x) = \begin{cases} z_\ell(x), & x \in [-1,0) \\ z_r(x), & x \in (0,1] \end{cases}$$

biçiminde ifade edelim. $p(-1) > 0$ olduğu için $y_\ell(x)$ ve $z_\ell(x)$ fonksiyonları (6) denkleminin (4) sınır şartlarını sağlayan sol çözümlerdir. Lemma 11 gereği

$$z_\ell(-1) = Cy_\ell(-1), z_\ell{}'(-1) = Cy_\ell{}'(-1) \qquad (35)$$

olacak biçimde C$\neq 0$ bulunur. Buradan

$$\mathrm{W}(\mathrm{y}_\ell, \mathrm{z}_\ell; -1) = \mathrm{y}_\ell(-1)\, \mathrm{z}_\ell{}'(-1) - \mathrm{y}_\ell{}'(-1)\, \mathrm{z}_\ell(-1) = 0$$

elde edilir. Şimdi (7), (8) geçiş şartlarını uygulayarak aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz.

$$W(y_r, z_r; +0) = \beta W(y_\ell, z_\ell; -0) = 0 \qquad (36)$$

$p(+0) > 0$ olduğu için sonuncu eşitlikten $\forall\, x \in (0,1]$ için $\mathrm{W}(\mathrm{y_r}, \mathrm{z_r}; \mathrm{x}) = 0$ bulunur. Buradan y_r ve z_r-nin lineer bağımlı olduğu sonucu elde edilir. O halde $z_r(x) = Dy_r(x)$ olacak biçimde D$\neq 0$ sabiti mevcuttur. Dolayısıyla

$$v_0(x) = \begin{cases} Cy_\ell(x), & x \in [-1,0) \\ Dy_r(x), & x \in (0,1] \end{cases} \qquad (37)$$

eşitliği sağlanır. $v_0(x)$ fonksiyonu λ_0 özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon olduğu için

$$v_0(+0) = \alpha v_0(-0), \; v_0{}'(+0) = \beta v_0{}'(-0) \qquad (38)$$

geçiş şartlarını sağlar. (37) ile tanımlı $v_0(x)$ fonksiyonunu (38) de yerine yazarsak

$$Dy_r(+0) = Cy_\ell(-0) \qquad (39)$$

ve

$$Dy_r{}'(+0) = \beta C y_\ell{}'(-0) \qquad (40)$$

elde edilir. Diğer taraftan $u_0(x)$ özfonksiyonu da (2)-(3) geçiş şartlarını sağladığı için

$$y_r(+0) = y_\ell(-0) \qquad (41)$$

ve

$$y_r{}'(+0) = \beta y_\ell{}'(-0) \qquad (42)$$

eşitlikleri sağlanır. (39)-(42) eşitliklerinden $D = C$ elde edilir. O halde (37) eşitliğinden $v_0(x) = Cu_0(x)$ eşitliğini elde ederiz. $p(1) > 0$ ve $p(-1)\, p(1) > 0$ durumları için teoremin ispatı tamamen benzerdir.

KAYNAKLAR

[1] Birkhoff, G. D. (1908). On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter. *Transactions of the American Mathematical Society*, *9*(2), 219-231.

[2] Birkhoff, G. D. (1908). Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, *9*(4), 373-395.

[3] Coddington, E. A., Levinson, N., & Teichmann, T. (1956). Theory of ordinary differential equations.

[4] Eastham, M. S. P. (1973). The spectral theory of periodic differential equations. *(No Title)*.

[5] McRobert, T. M. 1. Birkhoff, G. and Rota, GC, Ordinary differential Equations. Blaisdell (1962) 2. Bourbaki, H., Algèbre, Herman (1970) 3. Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. 2, J. Wiley (1966).

[6] Mukhtarov, O., Olğar, H., & Aydemir, K. (2020). Eigenvalue problems with interface conditions. *Konuralp Journal of Mathematics*, *8*(2), 284-286.

[7] Mukhtarov, O. S., & Yücel, M. (2020). A study of the eigenfunctions of the singular Sturm–Liouville problem using the analytical method and the decomposition technique. *Mathematics*, *8*(3), 415.

[8] Mukhtarov, O. S., Yücel, M., & Aydemir, K. (2020). Treatment a new approximation method and its justification for Sturm–Liouville problems. *Complexity*, *2020*(1), 8019460.

[9] Mukhtarov, O., Yücel, M., & Aydemir, K. (2021). A new generalization of the differential transform method for solving boundary value problems. *Journal of New Results in Science*, *10*(2), 49-58.

[10] Olgar, H. (2023). On completeness of weak eigenfunctions for multi-interval Sturm-Liouville equations with boundary-interface conditions. *Demonstratio Mathematica*, *56*(1), 20220210.

[11] Olğar, H., Mukhtarov, O. S., Muhtarov, F. S., & Aydemir, K. (2022). The weak eigenfunctions of boundary-value problem with symmetric discontinuities. *Journal of Applied Analysis*, *28*(2), 275-283.

[12] Yücel, M., Mukhtarov, O. S., & Aydemir, K. (2023). Computation of eigenfunctions of nonlinear boundary-value-transmission problems by developing some approximate techniques. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática*.

[13] Yücel, M., & Muhtarov, F. (2023). Parameterized Differential Transform Method and Its Application to Boundary Value Transmission Problems. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, *28*(2), 412-423.

[14] Yücel, M., Muhtarov, F. S., & Mukhtarov, O. S. (2023). Generalized differential transformation method for solving two-interval Weber equation subject to transmission conditions. *Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series*, *109*(1), 168-176.