Uluslararası İleri Doğa Bilimleri ve Mühendislik Araştırmaları Dergisi
Sayı 8, S. 486-492, 11, 2024

Araştırma Makalesi

https://as-proceeding.com/index.php/ijanser
ISSN:2980-0811

International Journal of Advanced Natural Sciences and Engineering Researches
Volume 8, pp. 486-492, 11, 2024

Research Article

Arayüz şartları ile verilen iki-aralıklı Sturm-Liouville Problemi

Merve Yücel[1] ve Kadriye Aydemir[2*]

[1*] *Department of Mathematics/Faculty of Arts and Science, Hitit University, Turkey*
[2*] *Department of Mathematics/Faculty of Arts and Science, Amasya University, Turkey*

[*] *(kadriyeaydemr@gmail.com.tr) Email of the corresponding author*

(Received: 14 December 2024, Accepted: 17 December 2024)

(4th International Conference on Frontiers in Academic Research ICFAR 2024, December 13-14, 2024)

ATIF/REFERENCE: Yücel, M. & Aydemir, K. (2024). Arayüz şartları ile verilen iki-aralıklı Sturm-Liouville Problemi. *International Journal of Advanced Natural Sciences and Engineering Researches*, 8(11), 486-492.

Özet – Bu çalışmada iki aralıklı

$$\varphi'' + \big(\lambda - q(x)\big)\varphi = 0,\ [a,c) \cup (c,b] \tag{1}$$

diferensiyel denkleminden, parametreye bağlı

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{d \ln \varphi}{dx}\Big|_{x=c-|\varepsilon|} = \alpha\lambda \tag{2}$$

$$\lambda \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{d \ln \varphi}{dx}\Big|_{x=c+|\varepsilon|} = \beta \tag{3}$$

arayüz şartlarından ve

$$\varphi(a) = \varphi(b) \tag{4}$$

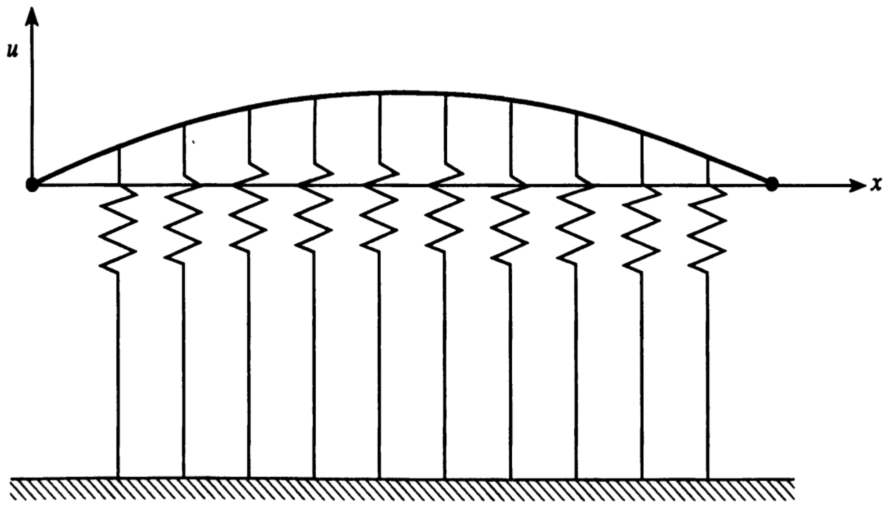
$$\varphi'(a) = \varphi'(b) \tag{5}$$

periyodik sınır şartlarından oluşan yeni tipten bir Sturm-Liouville problemininin bazı özellikleri araştırılacaktır. Burada $q(x)$ fonksiyonu $[a,c)$ ve $(c,b]$ aralıklarının her birinde tanımlı olan reel değerli sürekli bir fonksiyondur, $q(c \pm 0) = \lim_{\varepsilon\to 0} q(c \pm |\varepsilon|)$ sonlu limit değerleri mevcuttur, λ kompleks spektral parametredir, α, β ise pozitif reel sayılardır. Probleme uygun yeni bir iç çarpım tanımlanarak yeni bir Hilbert uzayı kurulmuştur. Bu Hilbert uzayında (1)-(5) probleminin ürettiği vektör diferansiyel operatör tanımlanmıştır. Bu vektör diferensiyel operatörün özdeğerleri problemin özdeğerleri ile çakışıktır, özvektörlerinin birinci bileşeni ise (1)-(5) probleminin özfonksiyonları ile çakışıktır.

Anahtar Kelimeler – Sturm-Liouville Problemi, Periyodik Sınır Şartı, Arayüz Şartı.

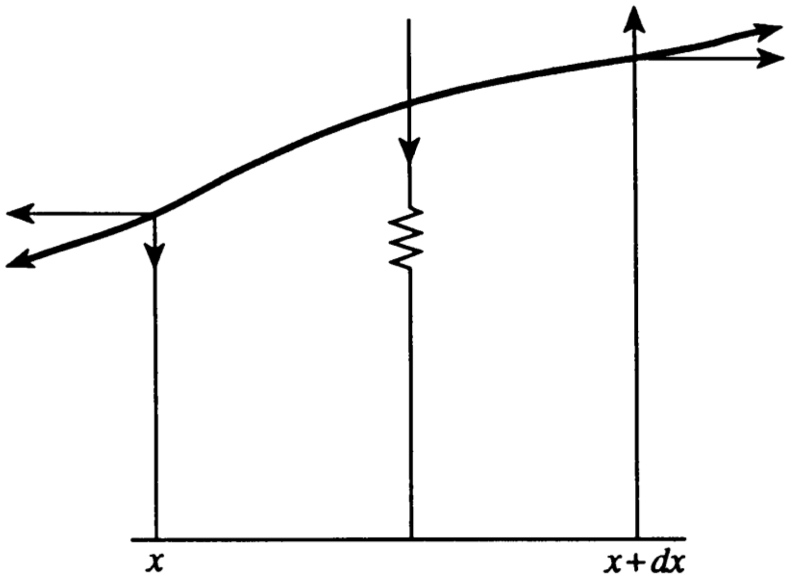
I. GİRİŞ

Son yıllarda Sturm-Liouville teorisi, mühendislik, fizik, biyoloji ve sosyal bilimlerdeki birçok problemin çözümünde ortaya çıkması nedeniyle büyük ilgi görmüştür. Matematiksel fizikte bağımsız değişkenlerin ayrılması yöntemiyle ortaya çıkan çeşitli kısmi diferansiyel denklemleri çözerken Sturm-Liouville özdeğer problemleri ile karşılaşılır. Bu ve diğer spektral yöntemler, farklı yoğunluklarda tabakalanmış suda sonar yayılımı, atmosferdeki büyük ölçekli dalgaların kararlılığı ve hızı vb. gibi olguları modelleyen Sturm-Liouville tipi özdeğer problemlerine yol açmaya devam etmektedir. Örneğin, Sturm-Liouville problemleri fiziksel bir sistemin normal modlarını ve salınım frekanslarını tanımlar. Bunu göstermek için, gerilim altındaki ağır esnek bir telin küçük enine problemini göz önüne alın(Şekil 1).



Şekil 1: Enine geri yükleme kuvvetleriyle gerilmiş ağır tel.

Telin x ekseni boyunca denge durumunda olduğu varsayılsın. Telin $x = a$; $x = b$ uçları sabittir. $v(x;\ t)$ ile tel üzerindeki x noktasının t anındaki yer değiştirmesi gösterilsin. Gerilimin küçük yer değiştirmeler nedeniyle t zaman değişkenine bağlı olmadığı hesaba katılarak x noktasındaki gerilim $p(x)$ ile gösterilsin. Ayrıca, $q(x)$ katsayısına sahip tel enine bir geri yükleme kuvveti varsayalım. Dolayısıyla, birim uzunluğa karşılık gelen kuvvet
$-q(x)\ \times$ yer değiştirmedir. $\psi(x)$ ile telin x noktasındaki yoğunluğu (yani, birim uzunluğa karşılık gelen kütle) gösterilsin. Küçük bir tel parçasının $(x;\ x + dx)$ kısmının nine hareketi Şekil 2 de gösterilmiştir.



Şekil 2: Telin bir elemanı üzerindeki kuvvetler ve bunların enine bileşenleri.

Bu durumda telin titreşimlerini tanımlayan kısmi diferensiyel denklem

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}}\left(\mathrm{p}(\mathrm{x})\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}}\right)-\mathrm{q}(\mathrm{x})\mathrm{v}=\mathrm{s}(\mathrm{x})\frac{\partial^2 \mathrm{v}}{\partial \mathrm{t}^2}$$

şeklinde elde edilir. p ve s sabit fonksiyonlar ve q sıfır fonksiyonu olduğunda bu denklemin özel durumu olan

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=c^2\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

klasik dalga denklemi elde edilir. Bu dalga denkleminde $v(x,t)=V(x)sinst$ yazarak değişkenlere ayırma metotu uygulanırsa

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dV}{dx}\right)+q(x)V\ =\lambda s(x)V$$

klasik Sturm-Liouville denklemi elde edilir. Böylece bir telin titreşimi problemi, $V(a)=0;\ V(b)=0:$ ayrılmış sınır koşullarına sahip standart Sturm-Liouville problemine indirgenir.

Dairesel sınırları olan bölgelerde birçok fiziksel olguyu modellerken sıklıkla ortaya çıkan bir diğer sınır koşulu türü, $u(a)=u(b);\ u(a)=u(b)$ biçimindeki ayrılmamış sınır koşullarıdır; periyodik sınır koşullarıdır. Ek olarak, atmosferdeki dalgalar, Dünya'nın sismik davranışı, bir ipin titreşimi veya kuantum mekaniksel bir osilatörün enerji özfonksiyonları gibi salınımlı süreçleri modellerken periyodik Sturm-Liouville problemleri ortaya çıkar; bu durumda özdeğerler, enerji seviyelerinin rezonans salınım frekanslarına karşılık gelir. Sturm-Liouville teorisi ve uygulamaları hakkında artık kapsamlı bir literatür bulunmaktadır (örneğin, [5, 10, 11, 12, 13, 14, 15] ve bunlarda atıfta bulunulan referanslara bakınız). Ayrıca çeşitli tipteki periyodik Sturm-Liouville problemlerin araştırılmasına yönelik birçok çalışma vardır (bkz. [1, 2, 3, 4, 6, 9]). Bu çalışmada iki aralıklı diferensiyel denklemden, parametreye bağlı arayüz şartlarından ve periyodik sınır şartlarından oluşan yeni tipten bir Sturm-Liouville problemininin bazı özellikleri araştırılmıştır.

II. ESAS SONUÇLAR

Bu bölümde (1)-(5) periyodik iki-aralıklı Sturm-Liouville problemine uygun Hilbert uzayını aşağıdaki biçimde tanımlayacağız. Alışılmış olduğu gibi $L_2(a,b)$ ile (a,b) sonlu aralığında tanımlı, Lebesgue anlamında integrallenebilir olan fonksiyonlar uzayını göstereceğiz. Bu uzayda, iç-çarpım

$$\langle f,g\rangle=\int_a^{\mathrm{b}} f(x)\overline{g(x)}\mathrm{dx} \tag{6}$$

eşitliği ile tanımlıdır. Bu iç-çarpım uzayının bir Hilbert uzayı olduğu literatürden bilinmektedir (bak, [7]).

$(L_2(a,c)\oplus L_2(c,b))\oplus\mathbb{C}^2$ ile $\quad f(x)=\begin{cases} f_\ell(x), & x\in\ [a,c) \\ f_r(x), & x\in\ (c,b]\end{cases},\ f_\ell\in L_2(a,c),\ f_r(x)\in L_2(c,b),$

$f_1,\ f_2\in\mathbb{C}$ olmak üzere $F:=(f(x),\ f_1,\ f_2)$ vektör-fonksiyonlar sınıfını göstereceğiz. Bu uzayda (1)-(5) problemine uygun iç çarpımı ise

$$F=(f(x),\ f_1,\ f_2),\ G:=(g(x),\ g_1,\ g_2)\in(L_2(a,c)\oplus L_2(c,b))\oplus\mathbb{C}^2$$

olmak üzere

$$\langle F,G\rangle_{H_{\alpha,\beta}}:=\int_a^{\mathrm{c}-0} f_\ell(x)\overline{g_\ell(x)}\mathrm{dx}+\int_{c+0}^{b} f_\ell(x)\overline{g_\ell(x)}dx+\frac{1}{\alpha}f_1\overline{g_1}+\frac{1}{\beta}f_2\overline{g_2} \tag{7}$$

eşitliği ile tanımlayacağız. Bu iç çarpıma uygun norm ise

$$\|F\|_{H_{\alpha,\beta}} := \left(\int_a^{c-0} |f(x)|^2 dx + \int_{c+0}^{b} |f(x)|^2 dx + \frac{1}{\alpha} |f_1|^2 + \frac{1}{\beta} |f_2|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (8)$$

biçiminde tanımlanır. Görüldüğü gibi tanımladığımız iç-çarpım uzayındaki iç-çarpım (1)-(5) probleminin geçiş şartlarında yer alan α, β katsayılarına bağımlı olarak tanımlanmıştır.

Teorem 1. $H_{\alpha,\beta}$ iç-çarpım uzayı Hilbert uzayıdır.

İspat. $F_n := (f_n(x),\ (f_n)_1,\ (f_n)_2)$, n=1,2,... dizisinin $H_{\alpha,\beta}$ iç-çarpım uzayında bir Cauchy dizisi olduğunu kabul edelim. $\forall\ \varepsilon > 0$ verilsin. O halde öyle $n_0 = n_0(\varepsilon)$ bulunur ki her $n, m > n_0$ için

$$\|F_n - F_m\|_{H_{\alpha,\beta}} < \varepsilon \quad (9)$$

sağlanır. Diğer taraftan

$$\|F_n - F_m\|_{H_{\alpha,\beta}} = \|f_n - f_m\|_{L_2(a,c)\oplus L_2(c,b)} + \frac{1}{\alpha}\ |(f_n)_1 - (f_n)_2\ | + \frac{1}{\beta}\ |(f_n)_1 - (f_n)_2\ | \quad (10)$$

olduğu için (9) gereği ($f_n(x)$) fonksiyonlar dizisi $L_2(a,c) \oplus L_2(c,b)$ Hilbert uzayında $(f_n)_1$ ve $(f_n)_2$ dizileri ise $\mathbb{C}$ de birer Cauchy dizileridir. O halde ($f_n(x)$) dizisi $L_2(a,c) \oplus L_2(c,b)$ uzayında bir $f(x)$ fonksiyonuna $(f_n)_1$ ve $(f_n)_2$ dizileri ise $f_1,\ f_2 \in \mathbb{C}$ sayılarına yakınsar. O halde (F_n) dizisi $(f(x),\ f_1,\ f_2) \in H_{\alpha,\beta}$ yakınsar. İspat bitti.

Tanım 2. $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer her $\forall\varepsilon > 0$ için öyle $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa ki, her sonlu $n \in \mathbb{N}$ sayıda ikişer-ikişer ayrık olan ve de $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \delta$ şartını sağlayan $(a_k, b_k) \subset [a,b]$ (k=1,2,...n) aralıkları için $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlansın, o halde f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında mutlak süreklidir denir ve bu fonksiyonlar kümesi $AC[a,b]$ simgesi ile gösterilir [8].

Şimdi (1)-(5) problemi için yeni bir uzay tanımlayacağız.

Tanım 3. $[a,b)$ yarıaçık ararlığında tanımlı olan $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer sonlu $f(b-0) = \lim_{\varepsilon \to 0} f(b - |\varepsilon|)$ limit değeri varsa ve bu fonksiyonun $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x),\ x \in\ [a,b) \\ f(b-0),\ x = b \end{cases}$ devamı için $\tilde{f} \epsilon\ AC[a,b]$ sağlanırsa, o halde böyle $f: [a,b) \to \mathbb{C}$ fonksiyonlar sınıfını $AC[a,b-0]$ ile göstereceğiz. Benzer biçimde $AC[a+0,b]$ fonksiyonlar sınıfı tanımlanır.

Tanım 4. $H_{\alpha,\beta}$ Hilbert uzayında tanım bölgesi

$$dom\mathcal{L} := \{\ F = (f(x),\ f_1, f_2)\ \big|\ F \epsilon\ H_{\alpha,\beta};\ f_\ell, f_\ell'\ \in\ AC[a, c-0],\ \ f_r,\ f_r'\ \in\ AC[c+0,b]\ ;\ f_\ell(a) =\ f_r(b),\ f_\ell'(a) =\ f_r'(b),\ f_1 = \alpha f_\ell(c-0),\ f_2 = {f_r}'(c+0)\} \quad (11)$$

olan $\mathcal{L}: H_{\alpha,\beta} \to H_{\alpha,\beta}$ vektör-diferensiyel operatörünü

$$\mathcal{L}(f(x),\ f_1, f_2) := (-f'' + q(x)f,\ f_\ell'(c-0), \beta f_r(c+0)) \quad (12)$$

eşitliği ile tanımlayacağız. Bu operatörü (1)-(5) probleminin ürettiği vektör-diferensiyel operatörü olarak adlandıracağız. Bu durumda (1)-(5) problemini

$$\mathcal{L}(\mathrm{f(x)}, \alpha \mathrm{f}_\ell(\mathrm{c}-0), {\mathrm{f}_\mathrm{r}}'(\mathrm{c}+0)\ ) = \left(-\mathrm{f}'' + q(\mathrm{x})\mathrm{f}, \mathrm{f}_\ell'(\mathrm{c}-0), \beta \mathrm{f}_\mathrm{r}(\mathrm{c}+0)\right) \quad (13)$$

vektör-diferensiyel operatör denklem biçiminde ifade edebiliriz. Böylece aşağıdaki sonucu elde edilmiştir.

Teorem 5. (11)-(12) eşitlikleri ile tanımlı $\mathcal{L}: H_{\alpha,\beta} \to H_{\alpha,\beta}$ vektör-diferensiyel operatörün özdeğerleri ile (1)-(5) iki aralıklı periyodik Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri çakışıktır, bu operatörün özelementlerinin ilk bileşenleri sistemi ile (1)-(5) iki aralıklı periyodik Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonlar sistemi çakışıktır.

Teorem 6. $\mathcal{L}: H_{\alpha,\beta} \to H_{\alpha,\beta}$ vektör-diferensiyel operatörün $dom\mathcal{L}$ tanım bölgesi her yerde yoğundur; yani

$$\overline{dom\mathcal{L}} = H_{\alpha,\beta} \quad (14)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\mathbb{C}_0^\infty[a, c-0\,] \oplus \mathbb{C}_0^\infty[c+0, b\,]$ ile $[a, c)$ ve $(c, b]$ aralıklarının her birinde sonsuz mertebeden diferensiyellenebilir olan öyle f fonksiyonları sınıfını göstereceğiz ki, her f için öyle $\delta = \delta(f) > 0$ sayısı mevcut olsun ki, $\forall$ x $\in [a, a+\delta\,) \cup (c-\delta,\ c) \cup (c,\ c+\delta) \cup (b-\delta, b)$ için f(x) = 0 olsun. Bilinmektedir ki, her sonlu kapalı Ω aralığı için $C_0^\infty(\Omega)$ kümesi $L_2(\Omega)$ da her yerde yoğundur (bak, [8]). O halde $\mathbb{C}_0^\infty[a, c-0\,] \oplus C\mathbb{C}_0^\infty[c+0, b\,]$ kümesi de $L_2(a,c) \oplus L_2(c,b)$ de her yerde yoğun olur. Ayrıca, kolayca anlaşılmaktadır ki

$$(\,\mathbb{C}_0^\infty[a, c-0\,] \oplus \mathbb{C}_0^\infty[c+0, b\,]) \oplus \mathbb{C}^2 \subset dom\mathcal{L} \subset (\,L_2(a,c) \oplus L_2(c,b)) \oplus \mathbb{C}^2 \quad (15)$$

sağlanır. $(\,\mathbb{C}_0^\infty[a, c-0\,] \oplus \mathbb{C}_0^\infty[c+0, b\,]) \oplus \mathbb{C}^2$ vektör-fonksiyon sınıfı $H_{\alpha,\beta}$ Hilbert uzayında her yerde yoğun olduğu için $\overline{dom\mathcal{L}} = H_{\alpha,\beta}$ eşitliği sağlanır. İspat bitti.

Teorem 7. $\mathcal{L}: H_{\alpha,\beta} \to H_{\alpha,\beta}$ vektör-diferensiyel operatörü simetrik operatördür, yani $\forall$ F, G $\in dom\mathcal{L}$ için

$$\langle \mathcal{L}F, G\,\rangle_{H_{\alpha,\beta}} = \langle F, \mathcal{L}G\,\rangle_{H_{\alpha,\beta}} \quad (16)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $F = (f(x),\ f_1, f_2)$, $G = (g(x),\ g_1, g_2)\ \in dom\mathcal{L}$ olduğu için, Lagrange eşitliğinden [5] yararlanarak

$$\langle \mathcal{L}F, G\,\rangle_{H_{\alpha,\beta}} - \langle F, \mathcal{L}G\,\rangle_{H_{\alpha,\beta}} = \mathrm{W}(f_\ell, \overline{g_\ell}; c-0) - W(f_\ell, \overline{g_\ell}; a) + \\ + \mathrm{W}(f_r, \overline{g_r}; b) - W(f_r, \overline{g_r}; c+0) + \frac{1}{\alpha}(\mathcal{L}F)_1\overline{g_1} \\ + \frac{1}{\beta}(\mathcal{L}F)_2\overline{g_2} - \frac{1}{\alpha} f_1\overline{(\mathcal{L}G)_1} - \frac{1}{\beta} f_2\overline{(\mathcal{L}G)_2} \quad (17)$$

eşitliğini elde ederiz. F, G $\in dom\mathcal{L}$ olduğu için

$$\mathrm{f_1 = \alpha f_\ell(c-0),\ f_2 = f_r{}'(c+0), g_1 = \alpha g_\ell(c-0),\ g_2 = g_r{}'(c+0),}$$

$$(\mathcal{L}\mathrm{F})_1 = \mathrm{f}_\ell'(\mathrm{c}-0), (\mathcal{L}\mathrm{F})_2 = \beta\mathrm{f_r}(\mathrm{c}+0), (\mathcal{L}\mathrm{G})_1 = \mathrm{g}_\ell'(\mathrm{c}-0), (\mathcal{L}\mathrm{G})_2 = \beta\mathrm{g_r}(\mathrm{c}+0)$$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca

$$W(f_\ell, \overline{g_\ell}; a) = \mathrm{W}(f_r, \overline{g_r}; b) \quad (18)$$

eşitliğinin sağlandığını da kolayca elde ederiz. Ayrıca $\mathcal{L}$ vektör-diferensiyel operatörün tanımından yararlanarak

$$\frac{1}{\alpha}(\mathcal{L}F)_1\overline{g_1}-\frac{1}{\alpha}f_1\overline{(\mathcal{L}G)_1} = \frac{1}{\alpha}f_\ell'(\mathrm{c}-0)\left(\alpha\overline{g_\ell(c-0)}\right)$$
$$-\frac{1}{\alpha}(\alpha f_\ell(c-0))\,\overline{g_\ell'(c-0)}$$
$$=\mathrm{f}_\ell'(\mathrm{c}-0)\overline{g_\ell(c-0)}-\mathrm{f}_\ell(c-0)\,\overline{g_\ell'(c-0)}$$
$$=\mathrm{W}(f_\ell,\overline{g_\ell};c-0) \qquad (19)$$

ve

$$\frac{1}{\beta}(\mathcal{L}F)_2\overline{g_2}-\frac{1}{\beta}f_2\overline{(\mathcal{L}G)_2} = \frac{1}{\beta}(\beta f_r(c+0)\left(\overline{g_r'(c+0)}\right)$$
$$-\frac{1}{\beta}f_r{}'(c+0)(\beta\,\overline{g_r(c+0)})$$
$$=f_r(c+0)\mathrm{g_r}'(\mathrm{c}+0)-f_r{}'(c+0)\,\overline{g_r(c+0)}$$
$$=W(f_r,\overline{g_r};c+0) \qquad (20)$$

eşitlikleri bulunur. (18), (19) ve (20) eşitlikleri gereği (17) eşitliğinin sağ tarafı sıfıra eşit olur. O halde (16) eşitliği sağlanır. İspat bitti.

Bu teoremden yararlanarak aşağıdaki teoremler elde edilir.

Teorem 8. (1)-(5) iki aralıklı periyodik Sturm-Liouville probleminin tüm özdeğerleri reeldir.

Teorem 9. (1)-(5) iki aralıklı periyodik Sturm-Liouville probleminin iki farklı λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine sırası ile karşılık gelen $\varphi(x,\lambda_1\,)$ ve $\varphi(x,\lambda_2\,)$ özfonksiyonları için

$$\int_a^{\mathrm{c}-0}\varphi(x,\lambda_1)\overline{\varphi(x,\lambda_2\,)}\mathrm{dx}+\int_{c+0}^{b}\varphi(x,\lambda_1)\overline{\varphi(x,\lambda_2\,)}dx+\alpha\varphi(c-0,\lambda_1)\overline{\varphi(c-0,\lambda_2\,)}$$
$$+\frac{1}{\beta}\varphi'(c+0,\lambda_1)\overline{\varphi'(c+0,\lambda_2\,)}\ \ =0 \qquad (21)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\varphi(x,\lambda_1\,)$ ve $\varphi(x,\lambda_2\,)$ özfonksiyonları yardımı ile

$$\phi_{\lambda_1}=(\ \varphi(x,\lambda_1\,),\alpha\varphi(c-0,\lambda_1),\varphi'(c+0,\lambda_1)\ )\in H_{\alpha,\beta}$$

ve

$$\phi_{\lambda_2}=(\ \varphi(x,\lambda_2\,),\alpha\varphi(c-0,\lambda_2),\varphi'(c+0,\lambda_2)\ )\in H_{\alpha,\beta}$$

elemanlarını tanımlayalım. O halde ϕ_{λ_1} ve ϕ_{λ_2} elemanları $\mathcal{L}$ operatörünün λ_1 ve λ_2 farklı özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları olur. $\mathcal{L}$ operatörü simetrik olduğu için ϕ_{λ_1} ve ϕ_{λ_2} ortogoneldir. Yani

$$\langle\phi_{\lambda_1},\phi_{\lambda_2}\rangle_{H_{\alpha,\beta}}=0 \qquad (22)$$

eşitliği sağlanır. (21) eşitliği (22) eşitliğinden direkt olarak elde edilir. İspat bitti.

KAYNAKLAR

[1] P. Binding and V. Hans, "*A Prfer angle approach to the periodic Sturm-Liouville problem"*, The American Mathematical Monthly 119.6 (2012): 477-484.

[2] İ. Çelik, G. Gokmen, "Approximate solution of periodic Sturm-Liouville problems with Chebyshev collocation method", Applied mathematics and computation 170.1 (2005): 285-295.

[3] M. S. P. Eastham, "The spectral theory of periodic differential equations." (No Title) (1973).

[4] X. Haoa, L. Liu, Y. Wu,"Existence and multiplicity results for nonlinear periodic boundary value problems", Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 2010, 72.9-10: 3635-3642.

[5] N. R. Kent, B. S. Edward, and D. S. Arthur. "Fundamentals of Differential Equations and boundary value problems." (2012).

[6] K. V., Khmelnytskaya, H. C. Rosu and A. Gonzlez. "Periodic Sturm-Liouville problems related to two Riccati equations of constant coefficients", Annals of Physics 325.3 (2010): 596-606.

[7] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*. Vol. 17. John Wiley & Sons, 1991.

[8] A. N. Kolmogorov, and S. V. Fomin. Introductory real analysis. Courier Corporation, 1975.

[9] O. Mukhtarov, K. Aydemir, "Two-linked periodic Sturm–Liouville problems with transmission conditions." Mathematical Methods in the Applied Sciences 44.18 (2021): 14664-14676.

[10] O. Mukhtarov, H. Olğar, and K. Aydemir, "Eigenvalue problems with interface conditions." *Konuralp Journal of Mathematics* 8.2 (2020): 284-286.

[11] H. Olğar, et al., "The weak eigenfunctions of boundary-value problem with symmetric discontinuities." Journal of Applied Analysis 28.2 (2022): 275-283.

[12] S. N. Öztürk, O. Mukhtarov, K.Aydemir. "Non-classical periodic boundary value problems with impulsive conditions." Journal of New Results in Science 12.1 (2023): 1-8.

[13] K.T. Tang, Mathematical methods for engineers and scientists. Vol. 1. New York: Springer, 2007.

[14] A. A. Shkalikov, A. A., and Oktay A. Veliev, "On the Riesz basis property of the eigen-and associated functions of periodic and antiperiodic Sturm-Liouville problems", Mathematical Notes 85.5-6 (2009): 647-660.

[15] G. Vanden Berghe, M. Van Daele, H. De Meyer, "A modified difference scheme for periodic and semiperiodic Sturm-Liouville problems", Applied numerical mathematics 18.1-3 (1995): 69-78