

Öteleme Yüzeylerinde Dalgalanma Etkisi

Gülden ALTAY SUROĞLU, Onur AKTAŞ

Matematik / Fen Bilimleri Enstitüsü, Fırat Üniversitesi, Türkiye
(ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1976-3465>)

Matematik / Fen Bilimleri Enstitüsü, Fırat Üniversitesi, Türkiye
(ORCID: <https://orcid.org/0009-0001-1770-7171>)

*(galtay@firat.edu.tr)

(Received: 22 February 2025, Accepted: 28 February 2025)

(4th International Conference on Contemporary Academic Research ICCAR 2025, February 22-23, 2025)

ATIF/REFERENCE: Suroğlu Altay, G. & Aktaş, O. (2025). Öteleme Yüzeylerinde Dalgalanma Etkisi. *International Journal of Advanced Natural Sciences and Engineering Researches*, 9(3), 62-68.

Özet – Öteleme yüzeyleri, diferansiyel geometri alanında yaygın olarak incelenmekte olup fizik, mühendislik ve bilgisayar grafikleri gibi çeşitli alanlarda uygulamalara sahiptir. Klasik öteleme yüzeyleri iki bağımsız fonksiyonun toplamı olarak tanımlanırken, sinüzoidal dalgalanmaların eklenmesi yüzeyin geometrik özelliklerini değiştirmektedir. Bu çalışmada, öteleme yüzeylerini oluşturan eğrilere sinüzoidal fonksiyonlar eklenerek ortaya çıkan dalgalanmaların yüzeyin ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği üzerindeki etkileri analiz edilmiş, sayısal simülasyonları yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Öteleme Yüzeyi, Minimal Yüzey, Gauss Eğriliği, Ortalama Eğrilik, Dalgalı Yüzey.

I. GİRİŞ

Bir öteleme yüzeyi, iki rasyonel uzay eğrisinden birinin her noktasını diğer eğri boyunca paralel olarak öteleyerek meydana gelir. Bu yüzeyler, aktif olarak CAD de tasarım ve modellemede kullanılır. Öteleme yüzeyleri, bilgisayar grafikleri ve bilgisayar destekli tasarım içinde kullanım alanları olduğundan beri incelenmektedir, [1]. Doğal olarak, bu yüzeyleri temsil etme yollarını bulmak ve bu temsilleri kullanarak onları tanımlamak, çalışma alanı olacaktır. Daha önce, verilen bir öteleme yüzeyini oluşturmak için iki uzay eğrisi bulma üzerine çalışmalar yapılmıştır. Bu, bir eğrinin parametrizasyonunu bulmayı içerir ki bu, öteleme yüzeyini oluşturmaya yardımcı olabilir ve ardından gerekli ikinci eğriyi bulmak için ilk eğriye dayanır. Daha sonraki çalışmalarda, bir öteleme yüzeyinin parametrik temsilini alarak yüzeyin denklemini bulmaya odaklanmıştır. Bu temsil, yüzey için bir destek fonksiyonu kullanılarak elde edilir, [2]. Crutcher, öteleme yüzeylerini matris temsilleri üzerinden incelemiştir, [3]. Ayrıca öteleme yüzeyleri mimaride ve betimleyici geometride daha kolay modellenebildiği için sık olarak kullanılır. Bir öteleme yüzeyi, yaygın olarak, $\alpha(s)$ ve $\beta(t)$ ureteç eğrilerinin toplamı olmak üzere, $\varphi(s, t) = \alpha(s) + \beta(t)$ şeklinde ifade edilmiştir, ([4]-[7]).

Diferansiyel geometride, Frenet-Serret formülleri, 3-boyutlu Öklidyen uzay da sürekli ve sürekli türevlenebilir bir eğri boyunca hareket eden bir parçacığın kinematik özelliklerini veya herhangi bir

hareketten bağımsız olarak eğrinin geometrik özelliklerini tanımlar. Daha spesifik olarak, formüller, birbirine bağlı olan tanjant, normal ve binormal birim vektörlerinin türevlerini tanımlar. Bu formülleri yazmak için şu anda kullanılan vektör gösterimi ve lineer cebir, keşfedildikleri zaman henüz kullanımda değildi. [8] 'de, Sasai bir dik çerçeve üzerinde çalıştı ve Frenet-Serret denklemini karşılayan bir formül elde etti.

Öteleme yüzeyleri, diferansiyel geometri ve yüzey teorisi bağlamında önemli bir araştırma alanıdır. Bir eğrinin belirli bir yönde ötelenmesiyle elde edilen bu yüzeyler, mühendislik, fizik, bilgisayar grafikleri ve akışkanlar mekaniği gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Klasik öteleme yüzeyleri, genellikle $S(x, y) = (x, y, f(x) + g(y))$ formunda tanımlanırken, bu çalışmada yüzeylere **periyodik dalgalanmalar eklenerek** oluşan yeni yüzeylerin incelenmesi amaçlanmaktadır.

Öteleme yüzeylerine sinüzoidal fonksiyonlarla dalgalanmalar eklenmesi, yüzeylerin geometrik ve analitik özelliklerini değiştirmekte ve farklı uygulamalara olanak sağlamaktadır. Bu bağlamda, $S(x, y) = (x, y, f(x) + g(y) + A\sin(w_1x) + B\sin(w_2x))$ şeklinde tanımlanan yüzeyler, hem klasik öteleme yüzeylerinin genişletilmiş bir versiyonunu sunmakta hem de dalgalanmaların yön, genlik ve frekans değişimlerine bağlı olarak nasıl etkilendiğini analiz etme fırsatı vermektedir.

Bu çalışmada, öteleme yüzeylerine eklenen dalgalanmaların **X ve Y eksenlerinde nasıl bir etki yarattığı** incelenmiştir. **A** ve **B** parametrelerinin farklı değerleri için yüzeyin değişimi analiz edilmiş, dalgalanmaların frekans ve genlik ile ilişkisi gösterilmiştir. Ayrıca, yüzeylerin ortalama eğrilik ve Gauss eğriliği üzerindeki etkileri değerlendirilerek, geometrik anlamda nasıl değiştikleri tartışılmıştır.

II. MATERYAL VE YÖNTEM

Öteleme yüzeyleri, genellikle bir eğrinin belirli bir doğrultuda ötelenmesi ile oluşturulur. **Klasik öteleme yüzeyleri** şu şekilde tanımlanır:

$$S(x, y) = (x, y, f(x) + g(y))$$

Bu çalışmada, yüzeye **sinüzoidal dalgalanmalar** eklenerek daha karmaşık bir yapı elde edilmiştir. **Dalgalı öteleme yüzeyi** şu şekilde tanımlanır:

$$S(x, y) = (x, y, f(x) + g(y) + A\sin(w_1x) + B\sin(w_2x))$$

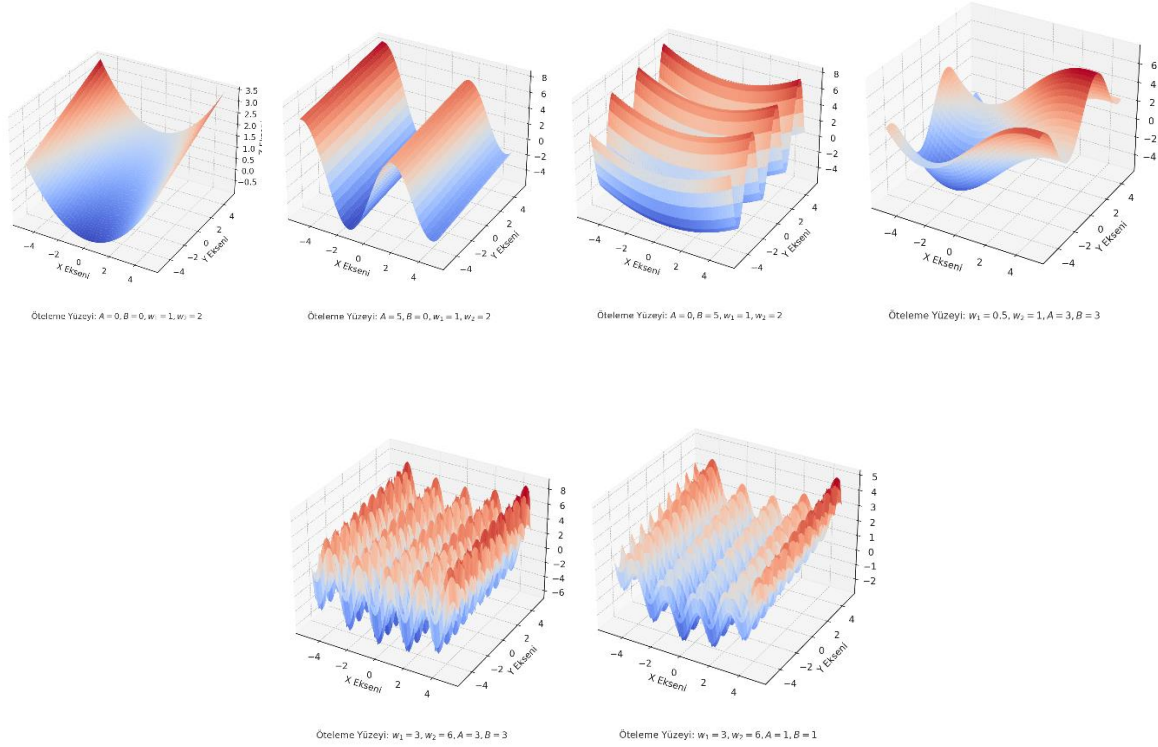
Burada:

- $f(x)$, X yönünde temel öteleme fonksiyonu
- $g(y)$, Y yönünde temel öteleme fonksiyonu
- $A\sin(w_1x)$, X yönünde dalgalanma bileşeni
- $B\sin(w_2x)$, Y yönünde dalgalanma bileşeni
- A, B, Dalgalanmaların genlikleri
- w_1, w_2 , Dalgalanmaların frekanslarını göstermektedir.

Aşağıdaki grafiklerde A, B, w_1 ve w_2 nin farklı değerlerine göre

$$S(x, y) = (x, y, \frac{x^2}{10} + \frac{y}{5} + A\sin(w_1x) + B\sin(w_2x))$$

öteleme yüzeyinin grafikleri gösterilmiştir.



III. DALGALANMALARIN GEOMETRİK ETKİLERİ

Tablo 1. Öteleme Yüzeyinde A ve B'nin Dalgalanma Yönlerine Etkisi.

A ve B Durumu	Dalgalanma Yönü ve Etkisi
$A > 0, B = 0$	X eksenini boyunca dalgalanma var, Y eksenini boyunca düzgün bir yüzey.
$A = 0, B > 0$	Y eksenini boyunca dalgalanma var, X eksenini boyunca düzgün bir yüzey.
$A > 0, B > 0$	Hem X hem de Y yönlerinde dalgalanmalar var, karmaşık bir yüzey oluşur.
$A > B$	X yönündeki dalgalanmalar daha büyük ve baskın.
$A < B$	Y yönündeki dalgalanmalar daha büyük ve baskın.
$A = B$	X ve Y yönlerinde eşit dalgalanmalar, simetrik bir yüzey oluşur.
$A = 0, B = 0$	Dalgalanma yok, yüzey sadece $f(x) + g(y)$ tarafından belirlenir.

Teorem 3.1: $\alpha(x)$ ve $\beta(y)$, üç boyutlu Öklid uzayı E^3 de iki eğri olsun.

$$\alpha(x) = (x, 0, f(x) + A\sin(w_1x)),$$

$$\beta(y) = (0, y, g(y) + B\sin(w_2y)) \text{ olmak üzere}$$

$$S(x,y)=(x,y, f(x) + g(y) + A\sin(w_1x) + B\sin(w_2y))$$

öteleme yüzeyi eğer

$f(x) = -A\sin(w_1x) + C_1x + C_2$ ve $g(y) = -B\sin(w_2y) + D_1y + D_2$ ise minimaldir.

İspat. $S(x,y)=(x,y, f(x) + g(y) + A\sin(w_1x) + B\sin(w_2y))$ yüzeyinin x e ve y ye göre türevlerini alırsak

$$S_x(x,y) = (1,0, f'(x) + Aw_1\cos(w_1x)),$$

$$S_y(x,y) = (0,1, g'(y) + Bw_2\cos(w_2y))$$

dir. Buradan I.temel formun katsayıları

$$E = \langle S_x, S_x \rangle = 1 + (f'(x) + Aw_1\cos(w_1x))^2,$$

$$F = \langle S_x, S_y \rangle = (f'(x) + Aw_1\cos(w_1x))(g'(y) + Bw_2\cos(w_2y)),$$

$$G = \langle S_y, S_y \rangle = 1 + (g'(y) + Bw_2\cos(w_2y))^2$$

olarak elde edilir. Bu yüzeyin normal vektör alanı ise

$$\vec{U} = S_x \times S_y$$

$$= (-f'(x) - Aw_1\cos(w_1x), -g'(y) - Bw_2\cos(w_2y), 1)$$

olarak elde edilir. O halde birim normal vektör alanı

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{(-f'(x) - Aw_1\cos(w_1x))^2 + (-g'(y) - Bw_2\cos(w_2y))^2 + 1}$$

olmak üzere

$$N = \frac{1}{\|\vec{U}\|} (-f'(x) - Aw_1\cos(w_1x), -g'(y) - Bw_2\cos(w_2y), 1)$$

dir. $S(x,y)$ nin ikinci mertebeden kısmi türevleri alınırsa

$$S_{xx}(x,y) = (0,0, f''(x) - Aw_1^2\sin(w_1x)),$$

$$S_{xy}(x,y) = (0,0,0),$$

$$S_{yy}(x,y) = (0,0, g''(y) - Bw_2^2\sin(w_2y))$$

elde edilir. II. Temel formun katsayıları

$$e = \langle S_{xx}, N \rangle = \frac{1}{\|\vec{U}\|} (f''(x) - Aw_1^2\sin(w_1x)),$$

$$f = \langle S_{xy}, N \rangle = 0,$$

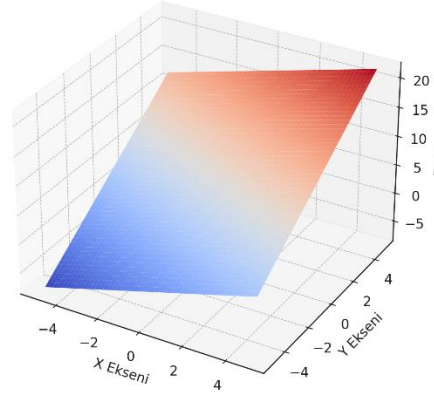
$$g = \langle S_{yy}, N \rangle = \frac{1}{\|\vec{U}\|} (g''(y) - Bw_2^2\sin(w_2y))$$

bulunur. Buradan

$$H = \frac{1}{2\|\vec{U}\|^{3/2}} \{ (f''(x) - Aw_1^2\sin(w_1x))(1 + (g'(y) + Bw_2\cos(w_2y))^2) + (g''(y) - Bw_2^2\sin(w_2y))(1 + (f'(x) + Aw_1\cos(w_1x))^2) \}$$

elde edilir. Böylece $f(x) = -A\sin(w_1x) + C_1x + C_2$ ve $g(y) = -B\sin(w_2y) + D_1y + D_2$

sonucuna ulaşılır. O halde $S(x,y)=(x,y, C_1x + D_1y + C_2 + D_2)$ yüzeyi minimal bir öteleme yüzeyidir.



Öteleme Yüzeyi: $S(x, y) = x + 2y + 5$

Sonuç 3.2: $S(x, y)$ yüzeyinin Gauss eğriliği

$$K = \frac{1}{\|\vec{U}\|^2} \{(f''(x) - Aw_1^2 \sin(w_1 x))(g''(y) - Bw_2^2 \sin(w_2 y))\}$$

elde edilir.

$$S(x, y) = (x, y, C_1 x + C_2 + g(y) + B \sin(w_2 x))$$

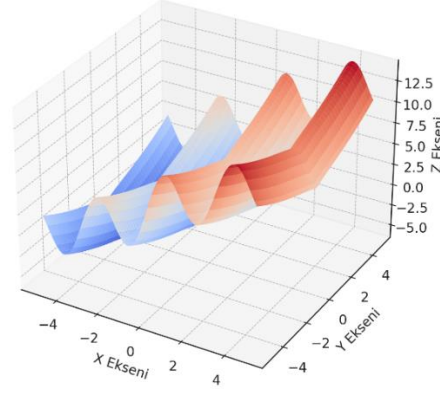
ve

$$S(x, y) = (x, y, D_1 y + D_2 + f(x) + A \sin(w_1 x))$$

yüzeleri açılabilir öteleme yüzeyleridir. Burada $f(x)$ ve $g(y)$ istenilen fonksiyonlar alınabilir.

Tablo 2. Açılabilir Öteleme Yüzeyinin Geometrik Yorumları

Durum	Yüzeyin Geometrik Yorumu
$C_1 = 0, C_2 = 0, g(y) = 0, B > 0$	Saf sinüzoidal yüzey (sadece dalgalanma var)
$C_1 > 0, g(y) = 0, B > 0$	X yönünde eğimli ve dalgalı yüzey
$C_1 > 0, g(y) = D_1 y$	X yönünde eğimli, Y yönünde doğrusal değişim içeren yüzey
$C_1 > 0, g(y) = D_1 y + D_2 y^2$	X yönünde eğimli, Y yönünde parabolik değişim içeren yüzey



$$S(x, y) = C_1x + C_2 + f(x) + g(y) + B\sin(w_2x)$$

$$f(x) = \tanh(x) + 0.2\sin(2x)$$

$$g(y) = \log(|y| + 1) + 0.1y^2$$

Sonuç 3.3: $S(x,y)$ yüzeyi için kısalığın hatırı için

$$\Omega = f'(x) + Aw_1\cos(w_1x) \quad \text{ve} \quad \Psi = g'(y) + Bw_2\cos(w_2y)$$

denirse

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{\Omega^2 + \Psi^2 + 1},$$

$$H = \frac{1}{2\|\vec{U}\|^{3/2}} \{\Omega'(1 + \Psi^2) + \Psi'(1 + \Omega^2)\}$$

ve

$K = \frac{\Omega'\Psi'}{\|\vec{U}\|^2}$ olarak elde edilir. Buradan yüzeyin asli eğrilikleri

$$k_{1,2} = \frac{\Omega'(1 + \Psi^2) + \Psi'(1 + \Omega^2)}{2(\Omega^2 + \Psi^2 + 1)^3} \mp \sqrt{\frac{\Omega'(1 + \Psi^2) + \Psi'(1 + \Omega^2)}{2(\Omega^2 + \Psi^2 + 1)^3} - \frac{\Omega'\Psi'}{\Omega^2 + \Psi^2 + 1}}$$

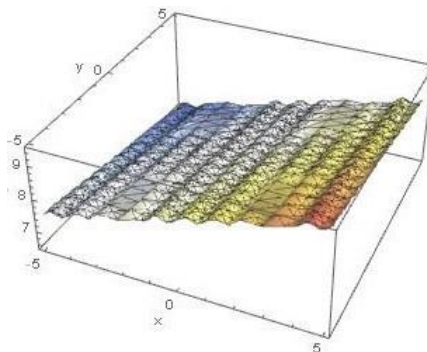
olarak elde edilir.

Örnek 3.4: $S(x,y)$ öteleme yüzeyinde $A = 0.5, B = 0.3, w_1 = 2\pi, w_2 = 3\pi, f(x) = 0.2x + 5,$
 $g(y) = -0.1x + 3$ alındığında

$$H = -3.857180565254717 \times 10^{-16},$$

$$K = -1.100808373668541 \times 10^{-31},$$

$k_1 = 1.230640741519343 \times 10^{-16}$ ve $k_2 = -8.945001872028778 \times 10^{-16}$ olarak elde edilir.



IV. TARTIŞMA

Öteleme yüzeyleri, diferansiyel geometri alanında yaygın olarak incelenmekte olup fizik, mühendislik ve bilgisayar grafikleri gibi çeşitli alanlarda uygulamalara sahiptir. Özellikle mimari yapılarda, çatı sistemlerinde, grafik tasarımında oldukça önemli bir yere sahiptir. Bu çalışmanın da, literatürde bu alanlardaki çalışmalara ışık tutması düşünülmektedir.

V. SONUÇ

- Ortalama Eğrilik çok küçük ve yaklaşık sıfır olduğundan, yüzey minimal yüzeye oldukça yakındır.
- Gauss Eğriliği sıfıra yakın negatif bir değer olduğundan, yüzey düzlemsel ya da silindirik bir yapıya yaklaşmaktadır.
- Ana eğrilikler sıfıra yakın olup ters işaretli olduğundan, yüzey hiperbolik karaktere sahip ancak düzlemsel bir yüzeye çok yakındır.
- Bu nedenle, yüzeyin dalgalanmaları baskılanmış, genel eğimi doğrusal fonksiyonlar $f(x)$ ve $g(y)$ tarafından belirlenmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] Perez-Diaz, S., Shen, L. Parametrization of Translational Surfaces. In: Proceedings of the 2014 Symposium on Symbolic-Numeric Computation. 2014; 128-129.
- [2] Çetin M., Tunçer Y. Parallel Surfaces to Translation Surfaces in Euclidean 3-Space, C ommun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A. 2015; 64(2), 47-54.
- [3] Crutcher, A. Translational Surfaces, Missouri Journal of Mathematical Sciences. 2018; 30(2), 140-149.
- [4] Brauner, H. Lehrbuch der Konstruktiven Geometrie. Springer-Verlag, Wien New York, 2013.
- [5] Hohenberg, F. Konstruktive Geometrie in der Technik. Springer Vienna, Germany, 1966.
- [6] Schober, HTransparente Schalen From Topologie Tragwerk. Wilhelm Ernst & Sohn, Germany, (2015).
- [7] Akdemir, A. A. Eğrilik ile Modifiye Edilmiş Ortogonal Çatıda Eğrilik, Yüksek Lisans tezi, Erciyes Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, 2021
- [8] Sasai, T. The Fundamental Theorem of Analytic Space Curves And Apparent Singularities of Fuchsian Differential Equations, Tohoku Math. Journ. 1984; 36, 17-24.
- [9] Bükücü, B., Karacan, M. K. On the modified orthogonal frame with curvature and torsion in 3-Space. Mathematical Sciences and Applications E-Notes. 2016; 4(1), 184-188.